

Endomorphismes cycliques

Dans la suite, $\mathbb{E}_n$ désigne un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ (exemples : $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$) et u un endomorphisme de $\mathbb{E}_n$.

Etant donné un vecteur V de $\mathbb{E}_n$, on posera également :

$$S(V) = (V, u(V), u^2(V), \dots, u^{n-1}(V))$$

A noter que de façon générale, $S(V)$ est une partie à n éléments de $\mathbb{E}_n$ et pas nécessairement une base.

Pour $u = I_n$, l'endomorphisme identité de $\mathbb{E}_n$, $S(V)$ est une partie liée pour tout vecteur V .

I Définition

u est dit cyclique si il existe un vecteur V tel que $S(V)$ soit une base de $\mathbb{E}_n$. La matrice de u dans une telle base, est alors de la forme :

$$A(V) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & a_0(V) \\ 1 & 0 & & a_1(V) \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 0 & a_{n-2}(V) \\ 0 & & & 1 & a_{n-1}(V) \end{pmatrix}$$

où $(a_0(V), a_1(V), \dots, a_{n-1}(V))$ sont les composantes de $u^n(V)$ sur la base $(V, u(V), u^2(V), \dots, u^{n-1}(V))$

Une telle matrice est appelée **matrice compagnon**.

Remarque :

Un endomorphisme cyclique est de rang supérieur ou égal à $n - 1$. En effet :

$$Im(u) = Vect(u(V), u^2(V), \dots, u^n(V))$$

Les $n - 1$ premiers vecteurs de la famille génératrice de $Im(u)$ étant libres, la dimension de $Im(u)$ est supérieure ou égale à $n - 1$

II Sous-espaces propres

Soit λ une valeur propre de u et $\mathbb{E}_\lambda$ le sous espace propre associé. Soit X un vecteur de composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans une base $(V, u(V), u^2(V), \dots, u^{n-1}(V))$ alors, en notant pour simplifier $(a_0(V), a_1(V), \dots, a_{n-1}(V)) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
 X \in \mathbb{E}_\lambda &\Leftrightarrow A(V)X = \lambda X \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + a_1 x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-3} + a_{n-3} x_n = \lambda x_{n-2} \\ x_{n-2} + a_{n-2} x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_0) x_n \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - a_{n-2}\lambda^{n-3} - \dots - a_1) x_n \\ \vdots \\ x_{n-3} = (\lambda^3 - a_{n-1}\lambda^2 - a_{n-2}\lambda - a_{n-3}) x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}) x_n \\ x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ce système équivaut alors, par disjonction de cas, à

$$\begin{cases} 0 = x_n \\ x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-3} = 0 \\ x_{n-2} = 0 \\ x_{n-1} = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 0 = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_0 \\ x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - a_{n-2}\lambda^{n-3} - \dots - a_1) x_n \\ \vdots \\ x_{n-3} = (\lambda^3 - a_{n-1}\lambda^2 - a_{n-2}\lambda - a_{n-3}) x_n \\ x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}) x_n \\ x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1}) x_n \end{cases}$$

Nous en déduisons :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \Leftrightarrow \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_0 = 0$$

Pour λ valeur propre, notons V_1 le vecteur de composantes dans la base $(V, u(V), u^2(V), \dots, u^{n-1}(V))$:

$$((\lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - a_{n-2}\lambda^{n-3} - \dots - a_1), \dots, (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}), (\lambda - a_{n-1}), 1)$$

alors :

$$\mathbb{E}_\lambda = \{x_n V_1 : x_n \in \mathbb{K}\} = Vect(V_1)$$

donc :

$$\dim(\mathbb{E}_\lambda) = 1$$

Cela prouve que tous les sous espaces propres, lorsqu'ils existent (c'est le cas si $\mathbb{E}_n = \mathbb{C}^n$), sont de dimension 1.

III Polynôme caractéristique

Considérons le polynôme :

$$P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \dots - a_0$$

Nous avons vu précédemment :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$$

Or, en notant $P_u(X)$ le polynôme caractéristique de u , nous avons aussi :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \Leftrightarrow P_u(\lambda) = 0$$

Donc $P_u(X)$ et $P(X)$ ont les mêmes racines. Ainsi, dans le cas où $\mathbb{E}_n = \mathbb{C}^n$, ces polynômes étant scindés, sont égaux à un coefficient multiplicatif près. Le coefficient dominant de $P_u(X)$ étant $(-1)^n$ on en déduit :

$P_u(X) = (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \dots - a_0)$

Cependant, par souci de généralisation à un espace $\mathbb{E}_n$ sur un corps quelconque, déterminons ce polynôme caractéristique en développant un déterminant, par rapport à sa première ligne :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{vmatrix} -X & \dots & a_0 \\ 1 & -X & a_1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & & \ddots & -X & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & (a_{n-1} - X) \end{vmatrix}$$

$$= -X \begin{vmatrix} -X & & & a_1 \\ 1 & -X & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & (a_{n-1} - X) \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -X & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -X \\ & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nous voyons ainsi apparaître une relation de récurrence :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = -X \Delta(a_1, \dots, a_{n-1}) - (-1)^n a_0$$

Soit en déroulant une fois de plus cette relation :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = -X (-X \Delta(a_2, \dots, a_{n-1}) - (-1)^n a_1) - (-1)^n a_0$$

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (-X)^2 \Delta(a_2, \dots, a_{n-1}) + (-1)^n (-a_1 X - a_0)$$

Ce qui permet d'établir la conjecture :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \dots - a_1 X - a_0)$$

Vérifions cette conjecture par récurrence sur n

Initialisation pour $n = 2$:

$$\Delta(a_0, a_1) = \begin{vmatrix} -X & a_0 \\ 1 & a_1 - X \end{vmatrix} = X^2 - a_1 X - a_0 = (-1)^2 (X^2 - a_1 X - a_0)$$

La propriété est donc vraie

Hérédité :

Supposons que l'on ait pour $n \geq 2$:

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = (-1)^n (X^n - a_n X^{n-1} - a_{n-1} X^{n-2} - \dots - a_1)$$

alors :

$$\begin{aligned} \Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) &= -X \Delta(a_1, \dots, a_n) - (-1)^{n+1} a_0 \\ &= -X (-1)^n (X^n - a_n X^{n-1} - a_{n-1} X^{n-2} - \dots - a_1) - (-1)^{n+1} a_0 \\ &= (-1)^{n+1} (X^{n+1} - a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_1 X - a_0) \end{aligned}$$

Donc la propriété s'hérite.

On peut également développer le déterminant sur sa dernière colonne et obtenir :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n+1} a_0 + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k + (-1)^{2n} (a_{n-1} - X) \Delta_{n-1}$$

En notant que chaque mineur Δ_k développé sur sa première ligne donne :

$$\Delta_k = (-X)^k$$

Ainsi :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n+1}a_0 + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{n+k+1}a_k (-X)^k + (-1)^{2n}(a_{n-1} - X)(-X)^{n-1}$$

Soit :

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^n (X^n - a_{n-1}X^{n-1} - a_{n-2}X^{n-2} - \dots - a_0)$$

Cette méthode nous semble cependant moins simple que la précédente.

Notons alors que, le polynôme caractéristique étant indépendant de la base choisie, nous avons la propriété :

Si $S(V)$ et $S(W)$ sont deux bases de $\mathbb{E}_n$ (donc u cyclique) alors :

$$(a_0(V), a_1(V), \dots, a_{n-1}(V)) = (a_0(W), a_1(W), \dots, a_{n-1}(W))$$

IV Diagonalisation d'un endomorphisme cyclique

Soit u un endomorphisme cyclique de $\mathbb{E}_n$ alors :

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow u \text{ a } n \text{ valeurs propres distinctes}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons u diagonalisable. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u . Alors :

$$\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_{\lambda_1} \oplus \mathbb{E}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{E}_{\lambda_p}$$

Donc :

$$\dim(\mathbb{E}_n) = \dim(\mathbb{E}_{\lambda_1}) + \dim(\mathbb{E}_{\lambda_2}) + \dots + \dim(\mathbb{E}_{\lambda_p}) = 1 + 1 + \dots + 1 = p$$

On en déduit :

$$p = n$$

Donc u a n valeurs propres distinctes.

($\Leftarrow$) Supposons u a n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ alors :

$$\dim (\mathbb{E}_{\lambda_1} \oplus \mathbb{E}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{E}_{\lambda_n}) = n = \dim(\mathbb{E}_n)$$

donc :

$$\mathbb{E}_n = \mathbb{E}_{\lambda_1} \oplus \mathbb{E}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{E}_{\lambda_n}$$

d'où u diagonalisable