Les propriétés de l'ellipse

Une ellipse est, rappelons le, une courbe plane définie par une équation dans un repère orthonormé de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a, b étant deux réels strictement positifs tels que $a > b$

a est la longueur du demi grand axe et b celle du demi petit axe.

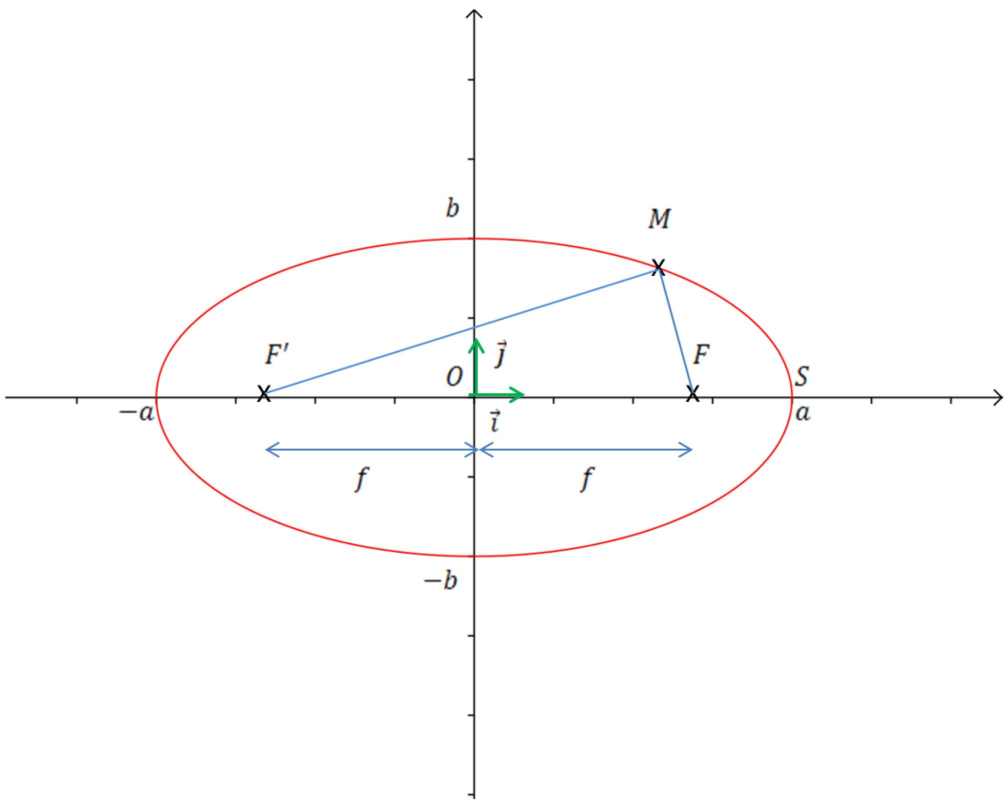
1) Propriétés focales

Les jardiniers savent faire des ellipses sur le sol en plantant deux poteaux et en tendant une corde plus grande que la distance entre les poteaux. Cela invite à s'intéresser, pour deux points F et F' donnés (les positions des piquets) et un nombre L (la longueur de la corde) strictement positif donné, aux ensembles de points M du plan vérifiant une relation de la forme :

$$MF + MF' = L$$

Notons les coordonnées des différents points dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O est le milieu de F et de F' et $\vec{\imath}$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{F'F}$ et de même sens.

$$M(x, y) \quad F(0, f) \quad F'(0, -f)$$



Notons également que, lorsque la corde est en partie superposée à elle-même, si on note S la position occupée par le point M, on a :

$$L = F'S + FS = F'F + 2\,FS = 2\,OS = 2\,a$$

On a alors :

$$MF + MF' = L$$

$$\Leftrightarrow MF^2 + {MF'}^2 + 2\,MF\,MF' = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow (x-f)^2 + y^2 + (x+f)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x-f)^2 + y^2)\,((x+f)^2 + y^2)} = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\,f\,x + f^2 + y^2 + x^2 + 2\,f\,x + f^2 + y^2$$
$$+ 2\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2 + 2\,f\,x)(x^2 + y^2 + f^2 - 2\,f\,x)} = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow 2\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,f^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,f^2\,x^2} = 4\,a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + y^2 + f^2)^2 - 4\,f^2\,x^2} = 2\,a^2 - (x^2 + y^2 + f^2)$$

A ce stade, le raisonnement ne peut avancer que par une simple implication, la réciproque se faisant dans un second temps. En élevant au carré la relation ci-dessus, on déduit la relation suivante :

$$(x^2+y^2+f^2)^2-4\,f^2\,x^2 = \left(2\,a^2-\,(x^2+\,y^2+\,f^2)\right)^2$$

Puis on poursuit par équivalence le raisonnement

$$(x^2+y^2+f^2)^2-4\,f^2\,x^2 = 4\,a^4-4\,a^2(x^2+\,y^2+\,f^2)+(x^2+y^2+f^2)^2$$

$$\Leftrightarrow\ 4\,(a^2-f^2)\,x^2+4\,a^2\,y^2 = 4\,a^2\,(a^2-f^2)$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-f^2}=1$$

Or on a :

$$f<a$$

On peut donc poser :

$$b=\sqrt{a^2-f^2}$$

L'équation précédente équivaut alors à :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b, ce qui prouve que notre ensemble initial est inclus dans une ellipse. Voyons la réciproque. Soit $M(x,y)$ un point de l'ellipse ci-dessus, alors les équivalences établies permettent de remonter jusqu'à :

$$(x^2+y^2+f^2)^2-4\,f^2\,x^2 = \left(2\,a^2-\,(x^2+\,y^2+\,f^2)\right)^2$$

Afin de pouvoir remonter plus haut il faut prendre la racine des deux membres mais pour cela examiner le signe de l'expression sous le carré. Or :

$$2\,a^2-\,(x^2+\,y^2+\,f^2)=(a^2-x^2)+(a^2-f^2-y^2)=(a^2-x^2)+(b^2-y^2)$$

et pour un point de l'ellipse, on a :

$$\begin{cases}-a\le x\le a\\ -b\le y\le b\end{cases}$$

donc

$$(a^2-x^2)+(b^2-y^2)\ge 0$$

Ainsi on déduit :

$$\sqrt{(x^2+y^2+f^2)^2-4\,f^2\,x^2} = 2\,a^2-\,(x^2+\,y^2+\,f^2)$$

et on peut remonter par équivalence jusqu'à $MF+MF'=L$

<u>Conclusion de l'analyse</u> :

Etant donnés deux points $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F'}$ d'un plan appelés foyers et $\boldsymbol{L}$ un réel strictement plus grand que la distance $\boldsymbol{FF'}$ alors l'ensemble des points $\boldsymbol{M}$ de ce plan tels que $\boldsymbol{MF + MF' = L}$ est une ellipse

Réciproquement, soit une ellipse d'équation en repère orthonormé :

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Alors il existe deux points $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F'}$ appelés foyers tels que l'ellipse soit l'ensemble des points du plan tels que $\boldsymbol{MF + MF' = 2\,a}$. Les coordonnées des foyers sont :

$$\boldsymbol{F(0, f) \quad F'(0, -f)}$$

avec :

$$\boldsymbol{f = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

2) <u>Directrice et excentricité</u>

Soit une ellipse d'équation en repère orthonormé :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Considérons une droite $\mathcal{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ du repère et d'équation $x = d$. Considérons alors pour un point $M(x, y)$ de l'ellipse, le carré du quotient de la distance MF à la distance de M à la droite $\mathcal{D}$.

$$\left(\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})}\right)^2 = \frac{(x - f)^2 + y^2}{(x - d)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\,f\,x + f^2 + y^2}{x^2 - 2\,d\,x + d^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2\,f\,x + f^2 + b^2\,\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}{x^2 - 2\,d\,x + d^2}$$

$$= \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2}\,x^2 - 2\,f\,x + f^2 + b^2}{x^2 - 2\,d\,x + d^2}$$

$$= \frac{\frac{f^2}{a^2}\, x^2 - 2\, f\, x + a^2}{x^2 - 2\, d\, x + d^2}$$

Si on souhaite que cette quantité ne dépende pas de x, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\frac{f^2}{a^2} = \frac{-2\, f}{-2\, d} = \frac{a^2}{d^2}$$

Ce problème possède une solution unique :

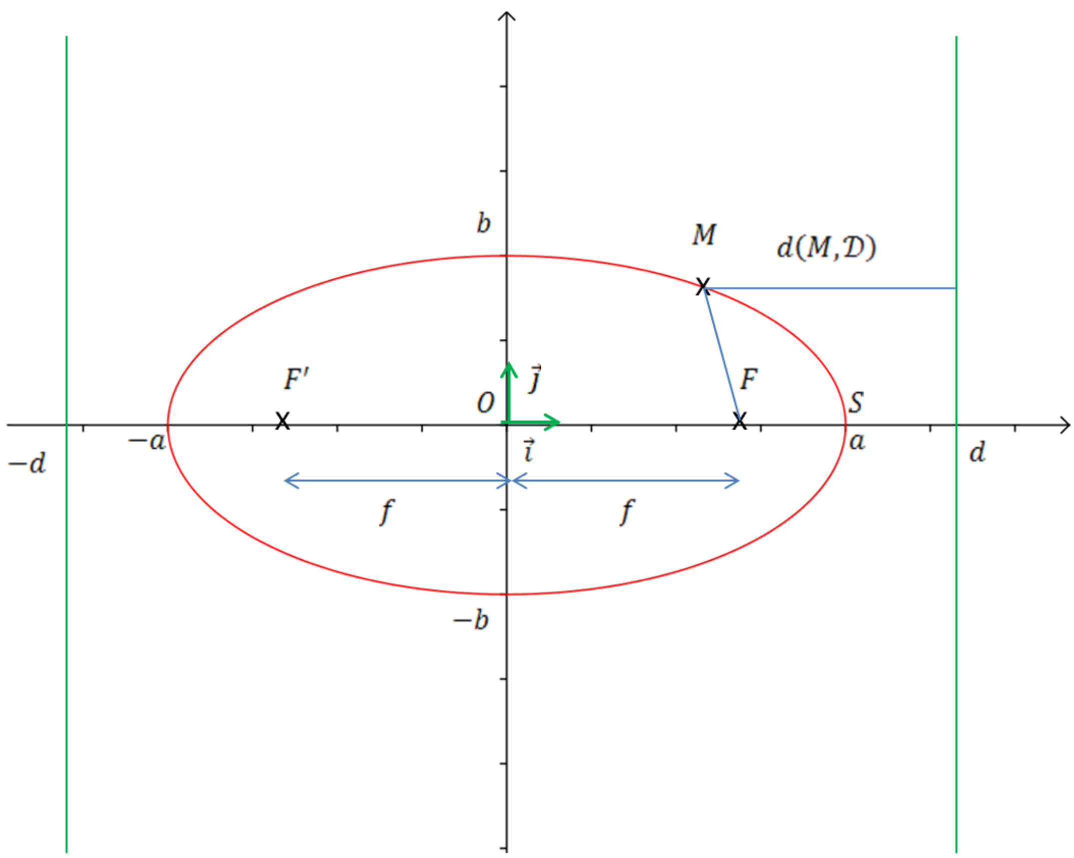
$$d = \frac{a^2}{f}$$

On a alors pour cette valeur :

$$\left(\frac{MF}{d(M,\mathcal{D})}\right)^2 = \frac{f^2}{a^2}$$

Un travail analogue peut se faire avec le foyer F' dans ce cas :

$$d' = \frac{a^2}{-f}$$



Conclusion de l'analyse :

L'ellipse possède deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ appelées directrices et d'équations respectives $x = d$ et $x = d'$ avec :

$$d = \frac{a^2}{f} \quad , \qquad d' = \frac{a^2}{f'} = \frac{a^2}{-f}$$

et est l'ensemble des points du plan tels que :

$$\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})} = \frac{f}{a}$$

et aussi l'ensemble des points du plan tels que :

$$\frac{MF'}{d(M, \mathcal{D}')} = \frac{f}{a}$$

On appelle excentricité de l'ellipse la quantité :

$$e = \frac{f}{a} < 1$$

3) Normale et bissectrice

Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse précédente, considérons le vecteur :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur étant de norme 1, on en déduit l'existence d'un réel t tel que :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = cos(t) \\ \frac{y}{b} = sin(t) \end{cases}$$

et réciproquement tout point M de coordonnées de cette forme est sur l'ellipse. Donc l'ellipse peut être décrite par un paramétrage cartésien :

$$\begin{cases} x = a\, cos(t) \\ y = b\, sin(t) \end{cases}$$

Un vecteur directeur de la tangente au point M est donc :

$$\vec{T}\begin{pmatrix} -\,a\ sin(t) \\ b\ cos(t) \end{pmatrix}$$

et un vecteur normal

$$\vec{N}\begin{pmatrix} -\,b\ cos(t) \\ -\,a\ sin(t) \end{pmatrix}$$

Soit alors des mesures des angles orientés :

$$\theta = \left(\overrightarrow{MF}, \vec{N}\right), \theta' = \left(\vec{N}, \overrightarrow{MF'}\right)$$

Rappelons que l'on a :

$$\overrightarrow{MF}.\vec{N} = MF \ \times \|\vec{N}\|\ cos(\theta)$$

$$\overrightarrow{MF'}.\vec{N} = MF' \ \times \|\vec{N}\|\ cos(\theta')$$

$$det\left(\overrightarrow{MF}, \vec{N}\right) = MF \ \times \|\vec{N}\|\ sin(\theta)$$

$$det\left(\overrightarrow{MF'}, \vec{N}\right) = MF' \ \times \|\vec{N}\|\ sin(\theta')$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux angles orientés $\left(\overrightarrow{MF}, \vec{N}\right)$ et $\left(\vec{N}, \overrightarrow{MF'}\right)$ aient même mesure est étant qu'ils aient même valeur de cosinus et des sinus de même signe, elle équivaut aux deux conditions :

$$\frac{\overrightarrow{MF}.\vec{N}}{MF} = \frac{\overrightarrow{MF'}.\vec{N}}{MF'}$$

$det\left(\overrightarrow{MF}, \vec{N}\right)$ et $det\left(\overrightarrow{MF'}, \vec{N}\right)$ de même signe

Ce que nous allons étudier.

On a :

$$\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix} f - a\ cos(t) \\ -\,b\ sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MF'}\begin{pmatrix} -f - a\ cos(t) \\ -\,b\ sin(t) \end{pmatrix}$$

Donc :

$$MF^2 = f^2 - 2\ a\ f\ cos(t) + a^{\ 2}\ cos^2(t) + b^{\ 2}\ sin^2(t)$$

$$= a^2 - b^2 - 2\ a\ f\ cos(t) + a^{\ 2}\ cos^2(t) + b^{\ 2}\left(1 - cos^2(t)\right)$$

$$= a^2 - 2\ a\ f\ cos(t) + (a^{\ 2} - b^{\ 2})\ cos^2(t)$$

$$= a^2 - 2\,a\,f\,cos(t) + f^2\,cos^2(t)$$

$$= \big(a - f\,cos(t)\big)^{\,2}$$

Donc :

$$MF = a - f\,cos(t)$$

De façon analogue :

$$MF' = a + f\,cos(t)$$

Ainsi :

$$\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} \cdot \vec{N} = \frac{-b\,f\,cos(t) + a\,b\,cos^2(t) + a\,b\,sin^2(t)}{a - f\,cos(t)} = b$$

De même :

$$\frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'} \cdot \vec{N} = b$$

Donc :

$$cos\big(\vec{N}, \overrightarrow{MF'}\big) = cos\big(\overrightarrow{MF}, \vec{N}\big)$$

De plus :

$$det\big(\vec{N}, \overrightarrow{MF'}\big) = \begin{vmatrix} -b\,cos(t) & -f - a\,cos(t) \\ -a\,sin(t) & -b\,sin(t) \end{vmatrix}$$

$$= b^2\,cos(t)\,sin(t) - a\,f\ \ sin(t) - a^2\,cos(t)\,sin(t)$$

$$= -a\,f\ \ sin(t) - f^2\,cos(t)\,sin(t)$$

$$= -f\,sin(t)\big(a + f\,cos(t)\big)$$

$$det\big(\overrightarrow{MF}, \vec{N}\big) = \begin{vmatrix} f - a\,cos(t) & -b\,cos(t) \\ -b\,sin(t) & -a\,sin(t) \end{vmatrix}$$

$$= -a\,f\,sin(t) + a^2\,cos(t)\,sin(t) - b^2\,cos(t)\,sin(t)$$

$$= -a\,f\ \ sin(t) + f^2\,cos(t)\,sin(t)$$

$$= -f\,sin(t)\big(a - f\,cos(t)\big)$$

Or pour tout réel t

$$\begin{cases} a + f\ cos(t) > 0 \\ a - f\ cos(t) > 0 \end{cases}$$

Donc $det(\vec{N}, \overrightarrow{MF'})$ et $det(\overrightarrow{MF}, \vec{N})$ sont de même signe. On en déduit que les angles orientés $(\vec{N}, \overrightarrow{MF'})$ et $(\overrightarrow{MF}, \vec{N})$ sont égaux et donc :

$\boldsymbol{(M, \vec{N})}$ **est la bissectrice de l'angle** $\boldsymbol{(F', \widehat{M}, F)}$