Dynamique des systèmes matériels indéformables

Les relations que nous avons établies au fichier intitulé « Dynamique des systèmes mécaniques généraux » pour un système, entre son torseur des efforts extérieurs et son torseur cinétique, ne présentent d'intérêt pour la détermination des positions précises de chaque point du système au cours de son évolution, que si le système n'a pas plus d'inconnues, pour en déterminer sa position, que nous avons d'équations.

Or nous disposons de six équations scalaires. La résolution de la position du système ne sera donc possible que si notre système est caractérisé par six variables indépendantes appelées **degrés de liberté**.

Voilà pourquoi nous allons nous intéresser à un système matériel indéformable, c'est-à-dire dont les différents points matériels le constituant (vu d'un point de vue macroscopique) conservent des distances fixes au cours du temps.

Un tel système a, dans son mouvement le plus général, six degrés de libertés. Trois coordonnées (x ; y ; z) sont nécessaires pour fixer la position du centre de gravité, et trois angles de rotation le sont pour fixer la position d'une base orthonormée rattachée au système.

Nous allons alors mettre en évidence la réduction du problème en faisant apparaître le torseur cinématique.

Torseur cinématique (ou torseur des vitesses)

Envisageons le mouvement des différents points du solide dans un référentiel quelconque donc pas nécessairement Galiléen, de repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$).

Considérons une base orthonormée directe ($\vec{I}$; $\vec{J}$;$\vec{K}$) évoluant avec le solide. Ces trois vecteurs qui sont des fonctions du temps, vérifient à tout instant :

$$\begin{cases} \vec{I} \cdot \vec{I} = 1 \\ \vec{J} \cdot \vec{J} = 1 \\ \vec{K} \cdot \vec{K} = 1 \\ \vec{I} \cdot \vec{J} = 0 \\ \vec{I} \cdot \vec{K} = 0 \\ \vec{J} \cdot \vec{K} = 0 \end{cases}$$

En dérivant ces 6 relations par rapport au temps, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} \cdot \vec{I} = 0 \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} \cdot \vec{J} = 0 \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} \cdot \vec{K} = 0 \\ \dfrac{d\vec{I}}{dt} \cdot \vec{J} + \dfrac{d\vec{J}}{dt} \cdot \vec{I} = 0 \\ \dfrac{d\vec{I}}{dt} \cdot \vec{K} + \dfrac{d\vec{K}}{dt} \cdot \vec{I} = 0 \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} \cdot \vec{K} + \dfrac{d\vec{K}}{dt} \cdot \vec{J} = 0 \end{cases}$$

Posons alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} = a\,\vec{I} + b\,\vec{J} + c\vec{K} \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} = a'\,\vec{I} + b'\vec{J} + c'\vec{K} \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} = a"\,\vec{I} + b"\,\vec{J} + c"\vec{K} \end{cases}$$

Les 6 relations précédentes conduisent alors à :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b' = 0 \\ c" = 0 \\ b + a' = 0 \\ c + a" = 0 \\ c' + b" = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} = b\,\vec{J} + c\vec{K} = b\,\vec{K} \wedge \vec{I} + c\,\vec{I} \wedge \vec{J} = \left(-\,c\,\vec{J} + b\,\vec{K}\right) \wedge \vec{I} \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} = -b\,\vec{I} + c'\vec{K} = -b\,\vec{J} \wedge \vec{K} + c'\vec{I} \wedge \vec{J} = \left(c'\,\vec{I} + b\,\vec{K}\right) \wedge \vec{J} \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} = -c\,\vec{I} - c'\vec{J} = -c\,\vec{J} \wedge \vec{K} - c'\vec{K} \wedge \vec{I} = \left(c'\,\vec{I} - \;c\,\vec{J}\right) \wedge \vec{J} \end{cases}$$

En introduisant alors le vecteur :

$$\vec{\Omega} = c'\vec{I} - \;c\,\vec{J} + b\,\vec{K}$$

nous constatons :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I} \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J} \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J} \end{cases}$$

Interprétons alors ce vecteur $\vec{\Omega}$.

Considérons pour cela un instant t, et une base orthornormée directe ($\vec{I_1}$; $\vec{J_1}$; $\vec{K_1}$) liée au solide telle, qu'à cet instant t, $\vec{K_1}$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{\Omega}$.

Alors pendant la durée dt infinitésimale, le vecteur $\vec{K_1}$ reste stationnaire, les vecteurs $\vec{I_1}$ et $\vec{J_1}$ tournent chacun d'un angle $d\theta = \|\vec{\Omega}\|$ dt.

La base ($\vec{I_1}$; $\vec{J_1}$; $\vec{K_1}$) du solide effectue donc une rotation d'angle $d\theta$ et d'axe défini par $\vec{\Omega}$. Si il existe un point A en lequel la vitesse à cet instant est nulle et nous verrons que c'est toujours le cas lorsque $\|\vec{\Omega}\|$ n'est pas nulle, alors le solide tourne entre les instant t et t + dt autour de l'axe (A, $\vec{\Omega}$) appelé **axe de rotation instantanée** à la vitesse angulaire $\|\vec{\Omega}\|$

$\vec{\Omega}$ est pour cette raison qualifié de **vecteur rotation instantané**.

Considérons alors deux points A et B du solide et notons :

$$\overrightarrow{AB} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K}$$

On a alors :

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K}$$

Dérivons cette relation par rapport au temps :

$$\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = X\,\frac{d\vec{I}}{dt} + Y\,\frac{d\vec{J}}{dt} + Z\,\frac{d\vec{K}}{dt}$$

Ce qui fait apparaître une relation entre vecteurs vitesses :

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = X\,\vec{\Omega} \wedge \vec{I} + Y\,\vec{\Omega} \wedge \vec{J} + Z\,\vec{\Omega} \wedge \vec{K}$$

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\Omega} \wedge \left(X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K}\right)$$

Nous en déduisons la relation essentielle de la dynamique du solide indéformable :

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Autrement dit, le vecteur $\vec{\Omega}$ permet d'évaluer la dérivée d'un vecteur fixe $\overrightarrow{AB}$ du solide indéformable.

La relation précédente fait également apparaître une relation intéressante du champ de vecteurs vitesse de l'espace géométrique emporté avec le solide :

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

Nous reconnaissons la propriété d'un torseur :

L'application, qui à tout point de l'espace emporté avec le solide, associe sa vitesse est appelée **torseur cinématique** (à ne pas confondre avec le torseur cinétique dont nous reparlerons plus loin). Sa résultante est le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

Tenseur d'inertie

Rappelons la relation que nous avons mise en évidence au fichier intitulé « Dynamique des systèmes généraux », pour un système de masse totale m et de vecteur vitesse $\vec{v}_G$ au centre d'inertie, entre le moment des efforts extérieurs $\vec{M}(A)$ en un point A <u>mobile</u>, le moment dynamique $\vec{\Gamma}(\mathrm{A})$ et le moment cinétique $\vec{\sigma}(A)$ en ce point :

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{A}) = \vec{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{dt}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} \wedge \boldsymbol{m}\,\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{G}}}$$

Les efforts extérieurs étant généralement connus (poids par exemple) ou exprimables en fonction des degrés de liberté du système (F = k x pour un ressort par exemple), il convient, pour exploiter, la relation précédente et conduire à trois équations différentielles sur les degrés de liberté, de calculer $\vec{\sigma}(\mathrm{A})$ en exploitant les informations du torseur cinématique. Voyons donc.

Considérons <u>**un point A du solide indéformable**</u> que nous désignerons par (S).

Définissons également <u>**un repère (A ; $\vec{I}$; $\vec{J}$; $\vec{K}$) lié au solide**</u>.

Evaluons lors les composantes du moment cinétique $\vec{\sigma}(A)$ dans la base du repère du solide que nous noterons en colonne :

$$\vec{\sigma}(A) = \begin{pmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \sigma_Z \end{pmatrix}$$

Nous avons alors, en voyant le solide comme étant constitué de N particules de matières, chacune étant repérée par un indice i, de masse m_i, de position instantanée M_i pouvant évoluer dans le temps, de vecteur vitesse instantané $\vec{v}_i$:

$$\vec{\sigma}(A) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \ \vec{v}_i$$

Or, nous avons, en utilisant le torseur des vitesses :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}$$

On en déduit :

$$\vec{\sigma}(A) = \sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{v}_A\right) + \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{AM_i}\right) \wedge \vec{v}_A + \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}\right)\right]$$

En faisant intervenir le centre d'inertie G du solide , nous avons :

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{\sigma}(A) = \mathrm{m}\, \overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \vec{\sigma}_1(A) \\ \textit{en posant :} \qquad \vec{\sigma}_1(A) = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}\right)\right]\end{gathered}}$$

En particulier, le moment cinétique propre du solide est :

$$\boxed{\vec{\sigma}_P = \vec{\sigma}_1(G) = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i\, \overrightarrow{GM_i} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM_i} \right) \right]}$$

Evaluons alors les composantes de $\vec{\sigma}_1(A)$ dans la base $(\vec{I}; \vec{J}; \vec{K})$ liée au solide. Quelques produits vectoriels s'imposent pour cela :

$$\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}_{\vec{\Omega}} \wedge \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}_{\overrightarrow{AM_i}} = \begin{pmatrix} Z_i \Omega_Y - Y_i\, \Omega_Z \\ X_i \Omega_Z - Z_i\, \Omega_X \\ Y_i \Omega_X - X_i\, \Omega_Y \end{pmatrix}_{\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}}$$

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}_{\overrightarrow{AM_i}} \wedge \begin{pmatrix} Z_i \Omega_Y - Y_i\, \Omega_Z \\ X_i \Omega_Z - Z_i\, \Omega_X \\ Y_i \Omega_X - X_i\, \Omega_Y \end{pmatrix}_{\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i}} = \begin{pmatrix} \left({Y_i}^2 + {Z_i}^2 \right) \Omega_X - X_i\, Y_i\, \Omega_Y - X_i\, Z_i\, \Omega_Z \\ - Y_i\, X_i\, \Omega_X + \left({X_i}^2 + {Z_i}^2 \right) \Omega_Y - Y_i\, Z_i\, \Omega_Z \\ - Z_i\, X_i\, \Omega_X - Z_i\, Y_i\, \Omega_Y + \left({X_i}^2 + {Y_i}^2 \right) \Omega_Z \end{pmatrix}_{\left[m_i\, \overrightarrow{AM_i} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM_i} \right) \right]}$$

Les composantes de $\vec{\sigma}_1(A)$ s'obtiennent donc par un produit d'une matrice, appelée **tenseur d'inertie**, par le vecteur colonne formé par les composantes du vecteur rotation :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_{1X} \\ \sigma_{1Y} \\ \sigma_{1Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i \left({Y_i}^2 + {Z_i}^2 \right) & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, X_i\, Y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, X_i\, Z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i\, Y_i\, X_i & \sum_{i=1}^{N} m_i \left({X_i}^2 + {Z_i}^2 \right) & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, Y_i\, Z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i\, Z_i\, X_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i\, Z_i\, Y_i & \sum_{i=1}^{N} m_i \left({X_i}^2 + {Y_i}^2 \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}}$$

Adoptons alors des notations plus commodes :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \sigma_{1X} \\ \sigma_{1Y} \\ \sigma_{1Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX} & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{YX} & J_{YY} & -J_{YZ} \\ -J_{ZX} & -J_{ZY} & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}}$$

Puis :

$$[J]_A = \begin{pmatrix} J_{XX} & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{YX} & J_{YY} & -J_{YZ} \\ -J_{ZX} & -J_{ZY} & J_{ZZ} \end{pmatrix}$$

Voyons alors quelle interprétation physique donner aux termes de ce tenseur.

Notons d'abord que la matrice associée au tenseur est symétrique. Un résultat de Mathématiques nous assure alors qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Si donc, $(\vec{I}; \vec{J}\,; \overrightarrow{K})$ est une telle base, la matrice se présente sous une forme diagonale, qui sera la forme fréquemment rencontrée dans les problèmes de mécanique étudiés :

$$[J]_A = \begin{pmatrix} J_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ} \end{pmatrix}$$

Il ne nous reste donc plus qu'à interpréter ces termes diagonaux. Voyons le premier :

$$J_{XX} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left({Y_i}^2 + {Z_i}^2\right)$$

Si nous notons r_i la distance entre le point M_i où se trouve la masse ponctuelle m_i et l'axe $\left(A\,; \vec{I}\right)$, c'est-à-dire l'axe des X de notre repère lié au solide, alors :

$$\boxed{J_{XX} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, {r_i}^2}$$

Autrement dit :

J_{XX} est la somme du produit des masses par le carré de la distance de ces masses à l'axe des X du repère du solide.

On l'appelle moment d'inertie du solide par rapport à cet axe.

J_{YY} et J_{ZZ} sont, de façon analogue, les moments d'inertie du solide respectivement par rapport à l'axe des Y et à l'axe des Z

Evaluons maintenant la dérivée du moment cinétique, car c'est elle qui est liée au moment des efforts extérieurs :

$$\frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} = \frac{d\left(m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A + \vec{\sigma}_1(A)\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\left(m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_A\right)}{dt} + \frac{d\vec{\sigma}_1(A)}{dt}$$

$$= m\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt} \wedge \vec{v}_A + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\left(\sigma_{1X}\,\vec{I} + \sigma_{1Y}\,\vec{J} + \sigma_{1Z}\,\vec{K}\right)}{dt}$$

$$= m(\vec{v}_G - \vec{v}_A) \wedge \vec{v}_A + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_A + \frac{d\left(\sigma_{1X}\,\vec{I} + \sigma_{1Y}\,\vec{J} + \sigma_{1Z}\,\vec{K}\right)}{dt}$$

$$= m\,\vec{v}_G \wedge \vec{v}_A + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_A + \frac{d\sigma_{1X}}{dt}\vec{I} + \frac{d\sigma_{1Y}}{dt}\vec{J} + \frac{d\sigma_{1Z}}{dt}\vec{K} + \sigma_{1X}\frac{d\vec{I}}{dt} + \sigma_{1Y}\frac{d\vec{J}}{dt} + \sigma_{1Z}\frac{d\vec{K}}{dt}$$

Soit :

$$\vec{\Gamma}(A) = \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\,\vec{v}_G$$

$$= m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_A + \frac{d\sigma_{1X}}{dt}\vec{I} + \frac{d\sigma_{1Y}}{dt}\vec{J} + \frac{d\sigma_{1Z}}{dt}\vec{K} + \sigma_{1X}\,\vec{\Omega} \wedge \vec{I} + \sigma_{1Y}\,\vec{\Omega} \wedge \vec{J} + \sigma_{1Z}\,\vec{\Omega} \wedge \vec{K}$$

$$= m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_A + \frac{d\sigma_{1X}}{dt}\vec{I} + \frac{d\sigma_{1Y}}{dt}\vec{J} + \frac{d\sigma_{1Z}}{dt}\vec{K} + \vec{\Omega} \wedge \left(\sigma_{1X}\,\vec{I} + \sigma_{1Y}\,\vec{J} + \sigma_{1Z}\,\vec{K}\right)$$

Finalement, nous obtenons la forme pratique la plus générale qui va lier les moments des efforts extérieurs aux degrés de liberté du solide :

$$\boxed{\vec{M}(A) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_A + \frac{d\sigma_{1X}}{dt}\vec{I} + \frac{d\sigma_{1Y}}{dt}\vec{J} + \frac{d\sigma_{1Z}}{dt}\vec{K} + \vec{\Omega} \wedge \left(\sigma_{1X}\,\vec{I} + \sigma_{1Y}\,\vec{J} + \sigma_{1Z}\,\vec{K}\right)}$$

Avec :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1X} \\ \sigma_{1Y} \\ \sigma_{1Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX} & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{YX} & J_{YY} & -J_{YZ} \\ -J_{ZX} & -J_{ZY} & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d\sigma_{1X}}{dt} \\ \frac{d\sigma_{1Y}}{dt} \\ \frac{d\sigma_{1Z}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX} & -J_{XY} & -J_{XZ} \\ -J_{YX} & J_{YY} & -J_{YZ} \\ -J_{ZX} & -J_{ZY} & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\Omega_X}{dt} \\ \frac{d\Omega_X}{dt} \\ \frac{d\Omega_Z}{dt} \end{pmatrix}$$

Nous simplifierons la relation en la notant :

$$\boxed{\vec{M}(A) = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}_A + [J]_A \frac{d\vec{\Omega}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge [J]_A \vec{\Omega}}$$

Différents cas particuliers simplifiant cette relation peuvent alors se présenter :

Cas où le point A est le centre d'inertie du solide

La relation précédente devient :

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{G}) = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{G})}{\boldsymbol{dt}} = [\boldsymbol{J}]_{\boldsymbol{G}} \frac{\boldsymbol{d}\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}}{\boldsymbol{dt}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \wedge [\boldsymbol{J}]_{\boldsymbol{G}}\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}}$$

Si de plus, la base $(\vec{I}; \vec{J}\,; \overrightarrow{K})$ du solide est choisie de telle sorte que la matrice d'inertie y soit diagonale, le repère $(G; \vec{I}; \vec{J}\,; \overrightarrow{K})$ est alors appelé **repère principal d'inertie** et l'équation, traduite matriciellement, devient, en utilisant la convention d'un point au dessus d'une grandeur pour en représenter la dérivée temporelle :

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Omega}_X \\ \dot{\Omega}_Y \\ \dot{\Omega}_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} J_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX}\,\dot{\Omega}_X \\ J_{YY}\,\dot{\Omega}_Y \\ J_{ZZ}\,\dot{\Omega}_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} J_{XX}\,\Omega_X \\ J_{YY}\,\Omega_Y \\ J_{ZZ}\,\Omega_Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX}\,\dot{\Omega}_X \\ J_{YY}\,\dot{\Omega}_Y \\ J_{ZZ}\,\dot{\Omega}_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (J_{ZZ} - J_{YY})\,\Omega_Y\,\Omega_Z \\ (J_{XX} - J_{ZZ})\,\Omega_X\,\Omega_Z \\ (J_{YY} - J_{XX})\,\Omega_X\,\Omega_Y \end{pmatrix}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\begin{cases} M_X = J_{XX}\,\dot{\Omega}_X + (J_{ZZ} - J_{YY})\,\Omega_Y\,\Omega_Z \\ M_Y = J_{YY}\,\dot{\Omega}_Y + (J_{XX} - J_{ZZ})\,\Omega_X\,\Omega_Z \\ M_Z = J_{ZZ}\,\dot{\Omega}_Z + (J_{YY} - J_{XX})\,\Omega_X\,\Omega_Y \end{cases}}$$

Si en plus, des liaisons du solide le contraignent à un mouvement remarquable comme la rotation autour d'un axe fixe, ces équations vont grandement se simplifier, comme nous allons le voir.

Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un solide pouvant se déplacer librement autour d'un axe Δ.

Prenons un repère adapté en choisissant un point *O* de cet axe (si possible le centre d'inertie du solide mais ce n'est pas toujours possible) et considérons un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ direct tel que $(O;\ \vec{k})$ soit l'axe Δ.

Considérons un repère $(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J}\ ;\ \vec{K})$ direct lié au solide tel que :

$$\begin{cases} \vec{I} = \cos(\theta)\ \vec{\imath} + \sin(\theta)\ \vec{\jmath} \\ \vec{J} = -\sin(\theta)\ \vec{\imath} + \cos(\theta)\ \vec{\jmath} \\ \vec{K} = \vec{k} \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\ \vec{\imath} + \dot{\theta}\cos(\theta)\ \vec{\jmath} \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\ \vec{\imath} - \dot{\theta}\sin(\theta)\ \vec{\jmath} \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{0} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{I}}{dt} = \dot{\theta}\ \vec{J} = \dot{\theta}\ \vec{K} \wedge \vec{I} \\ \dfrac{d\vec{J}}{dt} = -\dot{\theta}\ \vec{I} = \dot{\theta}\ \vec{K} \wedge \vec{J} \\ \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{0} = \dot{\theta}\ \vec{K} \wedge \vec{K} \end{cases}$$

On en déduit le, vecteur rotation instantané :

$$\boxed{\vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\vec{K}}$$

Ainsi, les composantes du vecteur rotation dans la base liée au solide sont très simples :

$$\begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

L'équation des moments devient alors :

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} J_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & J_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & J_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{ZZ}\,\ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{ZZ}\,\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Finalement, il ne reste qu'une équation très simple :

$$\boxed{\boldsymbol{M_Z = J_{ZZ}\,\ddot{\theta}}}$$

Calcul du tenseur d'inertie dans un repère du solide obtenu par translation du repère principal d'inertie

Considérons un repère $(A;\ \vec{I};\vec{J}\ ;\overrightarrow{K})$ lié au solide et tel que $(G;\ \vec{I};\vec{J}\ ;\overrightarrow{K})$ soit le repère principal d'inertie de ce solide.

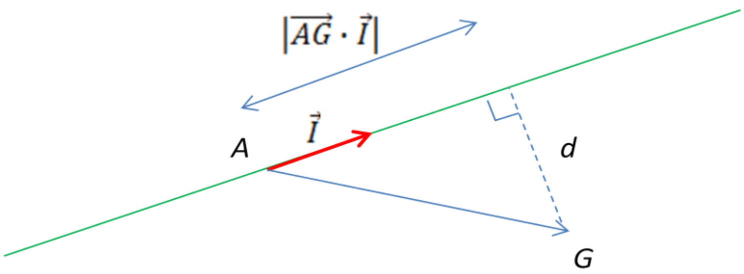
Déduisons alors le tenseur d'inertie $[J]_A$ dans le premier repère, du tenseur $[J]_G$ dans le second.

Le théorème d'Huygens nous permet en effet d'écrire :

$$J_{A\vec{I}} = J_{G\vec{I}} + m\,d^2$$

d étant la distance entre les deux droites $\left(A\ ;\vec{I}\right)$ et $\left(G\ ;\vec{I}\right)$

Evaluons alors cette distance à partir des coordonnées $(X_G\ ;\ Y_G\ ;\ Z_G)$ de G dans le repère $(A;\ \vec{I};\vec{J}\ ;\overrightarrow{K})$ à partir du théorème de Pythagore :



$$d^2 = \left\|\overrightarrow{AG}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{AG}\cdot\vec{I}\right)^2$$

$$d^2 = \left({X_G}^2 + {Y_G}^2 + {Z_G}^2\right) - {X_G}^2$$

Soit :

$$d^2 = {Y_G}^2 + {Z_G}^2$$

Ainsi :

$$\boxed{J_{A\vec{I}} = J_{G\vec{I}} + m\left({Y_G}^2 + {Z_G}^2\right)}$$

De même :

$$J_{A\vec{J}} = J_{G\vec{J}} + m\left({X_G}^2 + {Z_G}^2\right)$$

$$J_{A\vec{K}} = J_{G\vec{K}} + m\left({X_G}^2 + {Y_G}^2\right)$$

Voyons alors les termes non diagonaux du tenseur d'inertie, comme par exemple :

$$J_{AXY} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, X_i\, Y_i$$

où $(X_i\ ;\ Y_i\ ;\ Z_i)$ sont les coordonnées du point M_i dans le repère $(A;\ \vec{I};\vec{J}\,;\overrightarrow{K})$.

Ces dernières se déduisent des coordonnées $(X_{Gi}\ ;\ Y_{Gi}\ ;\ Z_{Gi})$ du point M_i dans le repère $(G;\ \vec{I};\vec{J}\,;\overrightarrow{K})$ par les formules de changement de repère, données par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AM_i} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM_i}$$

à savoir :

$$\begin{cases} X_i = X_G + X_{Gi} \\ Y_i = Y_G + Y_{Gi} \\ Z_i = Z_G + Z_{Gi} \end{cases}$$

On en déduit :

$$J_{AXY} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, X_i \, Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \, (X_G + X_{Gi}) \, (Y_G + Y_{Gi})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (m_i \, X_G \, Y_G) + \sum_{i=1}^{N} (m_i \, X_G \, Y_{Gi}) + \sum_{i=1}^{N} (m_i \, X_{Gi} \, Y_G) + \sum_{i=1}^{N} (m_i \, X_{Gi} \, Y_{Gi})$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) X_G \, Y_G + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, Y_{Gi}\right) \, X_G + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, X_{Gi}\right) \, Y_G + \sum_{i=1}^{N} m_i \, X_{Gi} \, Y_{Gi}$$

Or nous avons :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \overrightarrow{GM_\imath} = \vec{0}$$

Donc :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, X_{Gi} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, Y_{Gi} = 0$$

De plus, $(G; \; \vec{I}; \vec{J} \, ; \overrightarrow{K})$ étant le repère principal d'inertie, nous avons également :

$$J_{GXY} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, X_{Gi} \, Y_{Gi} = 0$$

Nous en déduisons :

$$\boxed{J_{AXY} = m\, X_G\, Y_G}$$

Des formules analogues s'établissent pour J_{AYZ}et J_{AXZ}

Nous pouvons ainsi résumer :

Si le tenseur d'inertie a pour expression, dans le repère principal d'inertie $(\boldsymbol{G};\ \vec{\boldsymbol{I}};\vec{\boldsymbol{J}}\ ;\vec{\boldsymbol{K}})$ d'un solide

$$[J]_{\boldsymbol{G}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J_{G\vec{I}}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J_{G\vec{J}}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J_{G\vec{K}}} \end{pmatrix}$$

alors, son expression dans un repère translaté $(A;\ \vec{\boldsymbol{I}};\vec{\boldsymbol{J}}\ ;\vec{\boldsymbol{K}})$ est :

$$[J]_{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J_{G\vec{I}} + m(Y_G{}^2 + Z_G{}^2)} & \boldsymbol{-\, m\, X_G\, Y_G} & \boldsymbol{-\, m\, X_G\, Z_G} \\ \boldsymbol{-\, m\, Y_G\, X_G} & \boldsymbol{J_{G\vec{J}} + m(X_G{}^2 + Z_G{}^2)} & \boldsymbol{-\, m\, Y_G\, Z_G} \\ \boldsymbol{-\, m\, Z_G\, X_G} & \boldsymbol{-\, m\, Z_G\, Y_G} & \boldsymbol{J_{G\vec{K}} + m(X_G{}^2 + Y_G{}^2)} \end{pmatrix}$$