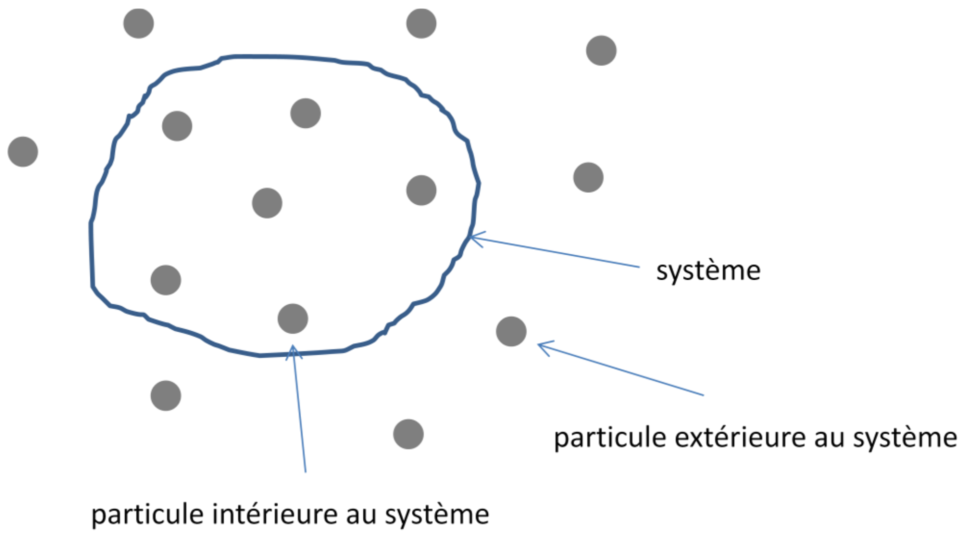
Dynamique des systèmes matériels généraux

Systèmes matériels généraux (déformables et indéformables)

Considérons un système matériel quelconque pouvant se déplacer dans un référentiel considéré comme Galiléen pour l'expérience (voiture sur une route, avion qui vole, bateau qui se déplace sur l'eau dans le référentiel terrestre, satellite dans le référentiel géocentrique, sonde dans le référentiel héliocentrique,…).

Nous pouvons voir ce système comme un ensemble de N petits éléments matériels repérés par un indice i et de masse m_i.



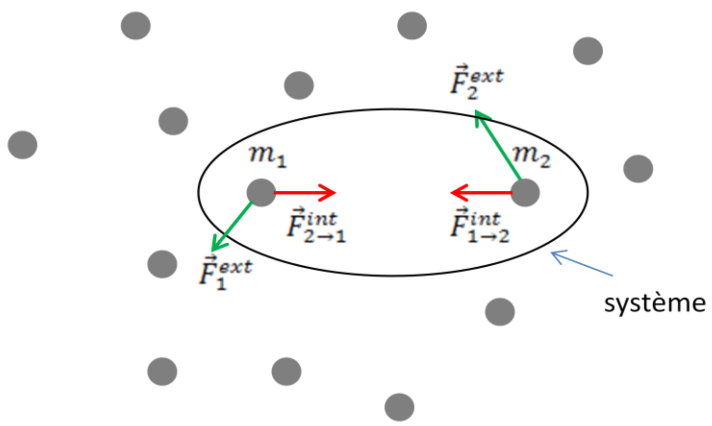
Faisons remarquer que la taille de ces éléments doit être certes petite à l'échelle macroscopique, mais pas trop, de telle sorte que ces derniers soient immobiles quand le système nous paraît au repos d'un point de vue macroscopique. Autrement dit, la taille de ces éléments doit être bien supérieure à celle des molécules ou atomes qui le composent.

Ces éléments seront alors qualifiés de particules de matière. Attention à ne pas les confondre avec les « vraies particules qui les composent à l'échelle de l'atome, qui elles ne sont jamais au repos sous l’effet de l’agitation thermique incessante, mais non détectable à notre échelle macroscopique.

<u>Cas de deux particules</u> (N = 2) :

Notons :

- $\vec{F}_1^{ext}$ =résultante des forces extérieures agissant sur la particule 1 (force gravitationnelle par exemple due à des astres environnants, force électrique due à des particules environnantes)
- $\vec{F}_2^{ext}$ =résultante des forces extérieures agissant sur la particule 1
- $\vec{F}_{2\to1}^{int}$ = force intérieure exercée par la particule 2 sur la particule 1 (interaction gravitationnelle ou électrique par exemple)
- $\vec{F}_{1\to2}^{int}$ = force intérieure exercée par la particule 1 sur la particule 2
- $\vec{a}_1$ = vecteur accélération de la particule 1 dans le référentiel Galiléen
- $\vec{a}_2$ = vecteur accélération de la particule 2 dans le référentiel Galiléen
- m_1 = masse de la particule 1
- m_2 = masse de la particule 2



La seconde loi de Newton, appliquée à chaque particule, s’écrit :

$$\begin{cases}\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2\to1}^{int} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1\to2}^{int} = m_2\vec{a}_2\end{cases}$$

Faisons alors la somme de ces deux relations :

$$\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{1\to2}^{int} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{2\to1}^{int} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

Or, nous avons pour les forces intérieures (c'est ce qui est à l'origine du principe de l'action et de la réaction) :

$$\vec{F}_{1\to2}^{int} + \vec{F}_{2\to1}^{int} = \vec{0}$$

La relation se simplifie et devient donc :

$$\boxed{\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2}$$

Posons-nous maintenant cette question simple : Si nous connaissions les forces du membre de gauche, imaginons par exemple deux boules de pétanque de même masse m, chargées d'une même électricité et qui donc se repoussent, lancées en l'air. L'équation donnerait :

$$2\,m\,\vec{g} = m\,\vec{a}_1 + m\,\vec{a}_2$$

Soit :

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = 2\ \vec{g}$$

Mettons que nous ayons lâché nos deux boules sans vitesse initiale, leur mouvement s'effectue alors dans un plan vertical et il fait apparaître 4 inconnues de position, les coordonnées des centres des boules dans un repère du plan. Or l'équation précédente ne fournit que deux équations, ce qui est insuffisant pour résoudre le problème.

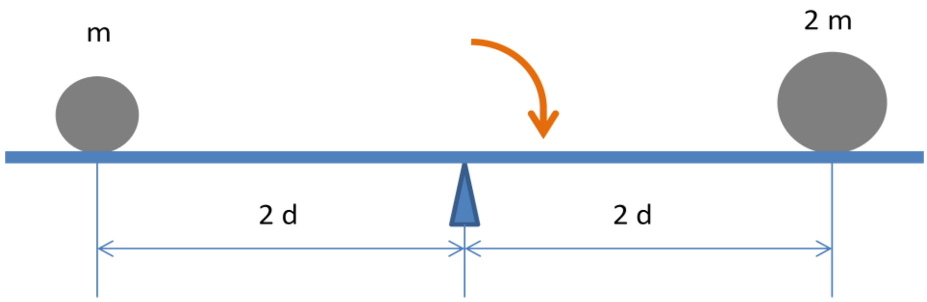
Nous devons donc établir les équations manquantes.

Le problème de la balançoire :

Posons deux masses m_1 et m_2 sur une planche pouvant pivoter librement autour d'un axe, et intéressons nous au système matériel formé par les masses et la planche supposée de masse négligeable par rapport aux deux masses initiales. Nous savons par expérience que la seule considération des forces extérieures ne suffit pas à caractériser l'équilibre.

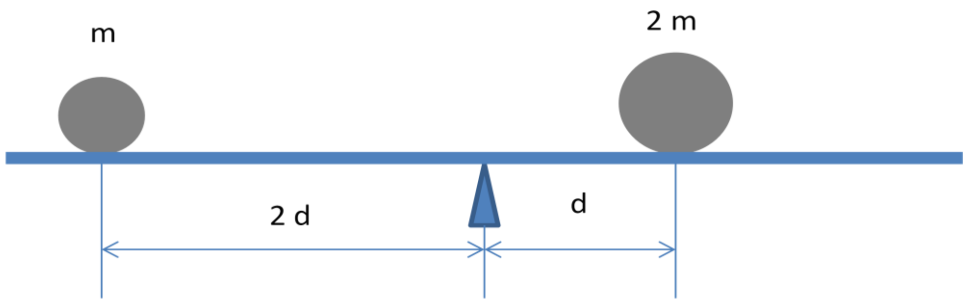
Supposons en effet par exemple : $m_1 = m$; $m_2 = 2\,m$ et notons d_1 (resp. d_2) la distance de m_1 (resp. m_2) à l'axe de pivot.

L'expérience des balançoires que nous avions eu enfant, nous rappelle que si $d_1 = d_2$, la planche n'est pas équilibrée mais s'abaisse du côté de la masse la plus grande.



Système non en équilibre

En revanche, si : $d_1 = 2\,d$; $d_2 = d$, le système est en équilibre.



Système en équilibre

Or les forces extérieures sont :

- $m_1\,\vec{g}$ = poids de la masse m_1
- $m_2\,\vec{g}$ = poids de la masse m_2
- $\vec{R}$ = réaction du pivot sur la planche

Et dans la situation d'équilibre, elles vérifient :

$$m_1\,\vec{g} + m_2\,\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

donc :

$$\vec{R} = -(m_1 + m_2)\,\vec{g}$$

L'application du principe selon lequel la somme vectorielle des forces extérieures est nulle pour un système immobile n'est donc pas suffisante pour le caractériser.

Cependant l'enfant qui est en nous a remarqué qu'à l'équilibre de la balançoire, nous avons toujours :

$$m_1\,d_1 = m_2\,d_2$$

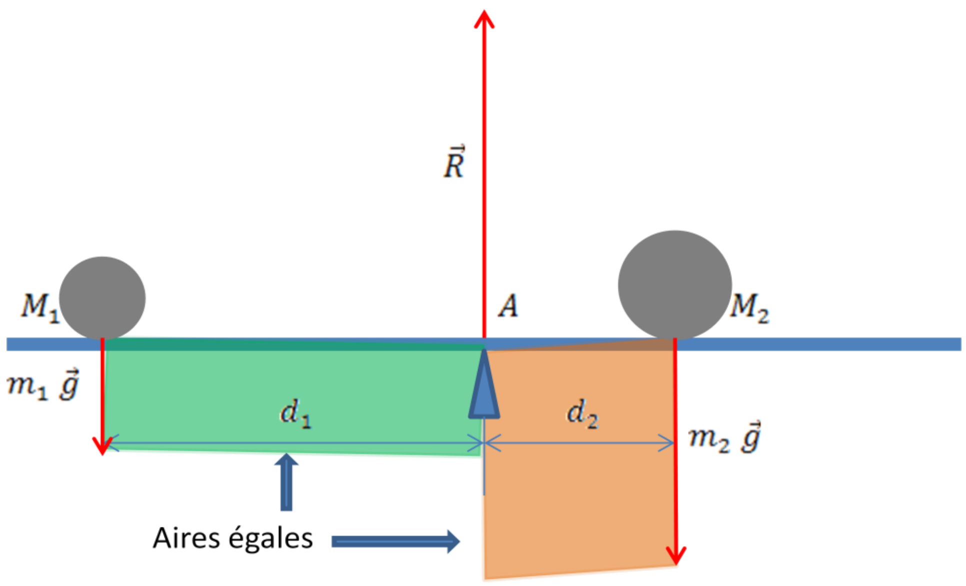
Ce qui peut encore s'écrire :

$$m_1\,g\,d_1 = m_2\,g\,d_2$$

Ce qui s'interprète comme une égalité d'aires de deux parallélogrammes.

Le premier parallélogramme est formé sur les vecteurs $m_1\,\vec{g}$ et $\overrightarrow{AM_1}$, A étant le point de contact entre la planche et l'axe de pivot, M_1 étant le point de contact de la masse m_1 avec la planche.

Le second parallélogramme est formé sur les vecteurs $m_2\,\vec{g}$ et $\overrightarrow{AM_2}$, M_2 étant le point de contact de la masse m_2 avec la planche.



La relation précédente peut alors se mettre sous la forme algébrique :

$$m_1\,g\,d_1 - m_2\,g\,d_2 = 0$$

Qui rappelle l'expression de la première loi de Newton, sauf que cette dernière porte sur des vecteurs forces.

Nous allons donc rendre cette relation vectorielle en notant que, si on considère un repère (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) orthonormé direct, avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ dans un plan horizontal, notre plan d'étude étant orienté par($\vec{\jmath}$; $\vec{k}$), alors la relation devient :

$$m_1\,g\,d_1\,\vec{\imath} - m_2\,g\,d_2\,\vec{\imath} = \vec{0}$$

Et nous reconnaissons des produits vectoriels :

$$\overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{g} = \vec{0}$$

Il est alors intéressant de noter que la réaction du pivot sur la planche peut figurer dans la relation, conduisant à

$$\boxed{\overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{g} + \overrightarrow{AA} \wedge \vec{R} = \vec{0}}$$

Cette formulation est intéressante à plus d'un titre : Le premier est qu'elle ne dépend pas du point A choisi. Changeons en effet A pour un point B quelconque du plan d'action des forces, mais ce pourrait être un point quelconque de l'espace :

$$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_1}\right) \wedge m_1\,\vec{g} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_2}\right) \wedge m_2\,\vec{g} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right) \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Puis développons le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{AB} \wedge m_2\,\vec{g} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{BM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{BM_2} \wedge m_2\,\vec{g} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Factorisons sur les trois premiers termes :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \left(m_1\,\vec{g} + m_2\,\vec{g} + \vec{R}\right) + \overrightarrow{BM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{BM_2} \wedge m_2\,\vec{g} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Or, l'équilibre se traduit par :

$$m_1\,\vec{g} + m_2\,\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{BM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{BM_2} \wedge m_2\,\vec{g} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \vec{0}}$$

Hum ! Intéressant non ! La relation prend la même forme.

Cela invite à définir pour une force $\vec{F}$ de point d'application M, le moment vectoriel par rapport à un point A sous la forme :

$$\boxed{\vec{M}_A^M(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$$

L'équilibre de la planche précédente se traduit alors par deux relations vectorielles, soit six équations scalaires :

$$\begin{cases} m_1\,\vec{g} + m_2\,\vec{g} + \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BM_1} \wedge m_1\,\vec{g} + \overrightarrow{BM_2} \wedge m_2\,\vec{g} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} = \vec{0} \end{cases}$$

B étant un point quelconque

En notation compacte, cela donne :

$$\boxed{\begin{cases} \sum \vec{F}_i^{ext} = \vec{0} \\ \sum \overrightarrow{BM_i} \wedge \vec{F}_i^{ext} = \vec{0} \end{cases}}$$

Nous voyons, qu'appliqué dans l'espace, car nous allons montrer qu'elles sont générales, ces relations vont fournir 6 équations, ce qui, dans le cas d'un système matériel indéformable, sera suffisant pour en déterminer l'évolution, puisqu'un tel système a une position pouvant être caractérisée par trois coordonnées dans un repère orthonormé et trois angles de rotation (on dit six degrés de libertés)

Les 3 équations manquantes du système à 2 particules :

Reprenons notre système de 2 particules initial dont l'évolution est, rappelons-le, régie par le système formé par l'application de la seconde loi de Newton à chaque particule

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2\to1}^{int} = m_1\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1\to2}^{int} = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Faisons alors apparaître les moments des différentes forces en un point A quelconque de l'espace :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM_1} \wedge \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{2\to1}^{int}\right) = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 \\ \overrightarrow{AM_2} \wedge \left(\vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{1\to2}^{int}\right) = \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Et sommons ces deux relations en distribuant le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1^{ext} + \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_{2\to1}^{int} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2^{ext} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_{1\to2}^{int} = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{a}_2$$

Notons alors que :

$$\overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_{2\to1}^{int} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_{1\to2}^{int}$$

$$= \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_{2\to1}^{int} - \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_{2\to1}^{int}$$

$$= \left(\overrightarrow{AM_1} - \overrightarrow{AM_2}\right) \wedge \vec{F}_{2\to1}^{int}$$

$$= \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{F}_{2\to1}^{int} = \vec{0}$$

Autrement dit les moments vectoriels des forces intérieures s'annulent. La relation devient alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1^{ext} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2^{ext} = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{a}_2}$$

<u>Torseur des efforts extérieurs et torseur dynamique</u> :

Tentons alors de donner une interprétation physique à l'équation précédente.

Prenons le membre de gauche. Les produits vectoriels traduisent la tendance qu'ont les forces extérieures à « tordre » le système par rapport au point A.

On peut reprendre l'image de la balançoire. Il est clair que, plus les poids $m_1\,\vec{g}$ et $m_2\,\vec{g}$ ont une grande intensité, plus ils vont, au sens propre, tordre la planche autour du point de pivot et éventuellement la rompre.

En revanche, si un enfant appuie vers le bas sur une extrémité de la planche et un autre enfant la tire vers le haut, la planche ne va pas se tordre, mais pivoter autour du pivot.

Nous retiendrons que le membre de gauche traduit la **tendance des forces à faire pivoter autour d'un point A**

Or ce point peut être pris n'importe où, la relation reste valable. Il peut même être un point mobile, donc variant à tout instant.

Nous sommes donc amenés à nous intéresser à la fonction mathématique, qui à tout point A de l'espace, fait correspondre le vecteur égal à la somme des moments vectoriels des forces extérieures :

$$\boxed{\vec{\mathcal{T}}_{F^{ext}}: A \to \overrightarrow{AM_1} \wedge \vec{F}_1^{ext} + \overrightarrow{AM_2} \wedge \vec{F}_2^{ext}}$$

Cette fonction est qualifiée de **torseur des forces extérieurs**.

Elle vérifie la propriété, en notant $\mathbb{E}$ l'espace des points de notre référentiel Galiléen .

$$\forall\,(A\,;B)\;\in\;\mathbb{E}^2\;:\;\vec{\mathcal{T}}_{F^{ext}}(B)=\vec{\mathcal{T}}_{F^{ext}}(A)+\vec{R}^{ext}\wedge\overrightarrow{BA}$$

Avec : $\vec{R}^{ext} = \vec{F}_1^{ext}+\vec{F}_2^{ext}$ = résultante des forces extérieures

Nous sommes amenés également à définir le **torseur dynamique** :

$$\vec{\mathcal{T}}_D : A\rightarrow\overrightarrow{AM_1}\wedge m_1\vec{a}_1+\overrightarrow{AM_2}\wedge m_2\vec{a}_2$$

Il vérifie également la propriété :

$$\forall\,(A\,;B)\;\in\;\mathbb{E}^2\;:\;\vec{\mathcal{T}}_{F^{ext}}(B)=\vec{\mathcal{T}}_{F^{ext}}(A)+\vec{R}_D\wedge\overrightarrow{BA}$$

Avec : $\vec{R}_D = m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2$ = résultante des quantités d'accélération

Notez qu'en mécanique, les deux précédents torseurs sont définis à chaque instant t du mouvement. Ils sont donc paramétrés par le temps.

La relation essentielle, en mécanique du solide indéformable, va être d'écrire la loi suivante :

A tout instant du mouvement, le torseur des efforts extérieurs est égal au torseur dynamique, ce qui signifie, égalité des résultantes et égalité des moments en un point quelconque A <u>pouvant même être mobile au cours du temps</u>.

__Formalisme général mathématique d'un torseur__ :

Un torseur en Mathématiques est une application $\vec{\mathcal{T}}$ d'un espace affine $\mathbb{E}$ dans un espace vectoriel $\mathcal{V}$ pour laquelle il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall\,(A\,;B)\ \in\ \mathbb{E}^2 :\ \vec{\mathcal{T}}(B) = \vec{\mathcal{T}}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

$\vec{R}$ est appelée **résultante du torseur**.

__Exemples de torseur__ : $\mathbb{E}$ est un espace affine euclidien à trois dimensions, $\mathcal{V}$ l'espace vectoriel associé (c'est ce qu'on utilise en mécanique)

- **Torseur point-vecteur** : soit un point M et un vecteur $\vec{u}$, définissons $\vec{\mathcal{T}}$ par :

  $$\vec{\mathcal{T}} : A \to \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}$$

  Vérifions que c'est un torseur :

  $$\begin{aligned}\vec{\mathcal{T}}(B) &= \overrightarrow{BM} \wedge \vec{u}\\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{u}\\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\end{aligned}$$

  Soit :

  $$\vec{\mathcal{T}}(B) = \vec{\mathcal{T}}(A) + \vec{u} \wedge \overrightarrow{AB}$$

  Donc $\vec{\mathcal{T}}$ est un torseur de résultante $\vec{R} = \vec{u}$

- **Torseur couple de point-vecteur** : soient 2 point-vecteur $(M\,;\,\vec{u})$ et $(N\,;\,\vec{v})$, définissons $\vec{\mathcal{T}}$ par :

  $$\vec{\mathcal{T}} : A \to \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{AN} \wedge \vec{v}$$

  Vérifions que c'est un torseur :

  $$\vec{\mathcal{T}}(B) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{BN} \wedge \vec{v}$$

$$= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{u} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}\right) \wedge \vec{v}$$
$$= \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{AN} \wedge \vec{v}$$

Soit :

$$\vec{\mathcal{T}}(B) = \vec{\mathcal{T}}(A) + (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Donc $\vec{\mathcal{T}}$ est un torseur de résultante $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$

- **Torseur N-uplet de point-vecteur** : soient N point-vecteur $(M_i\ ;\ \vec{u}_i)$, définissons $\vec{\mathcal{T}}$ par :

$$\vec{\mathcal{T}} : A \to \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{u}_i$$

Vérifions que c'est un torseur :

$$\vec{\mathcal{T}}(B) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{BM_i} \wedge \vec{u}_i$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_i}\right) \wedge \vec{u}_i$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{u}_i$$

Soit :

$$\vec{\mathcal{T}}(B) = \vec{\mathcal{T}}(A) + \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{u}_i\right) \wedge \overrightarrow{AB}$$

Donc $\vec{\mathcal{T}}$ est un torseur de résultante $\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{u}_i$

Eléments de réduction d'un torseur

Un torseur étant complètement déterminé par sa résultante $\vec{R}$ et la valeur de son moment $\vec{\mathcal{T}}(A)$ en un point A quelconque, la colonne formée par ces vecteurs est appelée colonne des **éléments de réduction du torseur en A** et notée :

$$\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{T}}(A) \end{pmatrix}_A$$

Torseur cinétique

Reprenons le torseur dynamique associé à nos deux particules précédentes. Rappelons que sa résultante est :

$$\vec{R}_D = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

Et son moment en un point A :

$$\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{a}_2$$

Nous allons retravailler ces deux relations en commençant par la première :

$$\vec{R}_D = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2$$

$$= m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$= \frac{d(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{dt}$$

Puis la seconde :

$$\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{a}_2$$

$$= \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1\right)}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2\right)}{dt}$$

$$= \frac{d\left(\overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2\right)}{dt}$$

Cela invite à introduire un autre torseur, le **torseur cinétique ou torseur des quantités de mouvement**, défini par :

$$\boxed{\vec{\mathcal{T}}_C : A \rightarrow \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2}$$

Sa résultante est : $\vec{R}_C = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ = résultante des quantités de mouvement

Son moment en A est appelé **vecteur moment cinétique** et noté généralement $\vec{\sigma}_A$

La propriété que nous avons mise en évidence est que la résultante du torseur dynamique est la dérivée de la résultante du torseur cinétique, et que la dérivée du moment du torseur dynamique en un point A fixe du référentiel d'étude, est la dérivée du moment du torseur cinétique en ce point . On dit alors **que le torseur dynamique est la dérivée du torseur cinétique**.

Centre d'inertie

Nous pouvons aller plus loin en notant que :

$$\vec{R}_C = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$= m_1\frac{d\overrightarrow{OM}_1}{dt} + m_2\frac{d\overrightarrow{OM}_2}{dt}$$

$$= \frac{d\left(m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2\right)}{dt}$$

Introduisons alors le point G, barycentre des points M_1et M_2 affectés de leurs masses m_1 et m_2, c'est-à-dire rappelons le, l'unique point vérifiant :

$$\boxed{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2 = (m_1 + m_2)\,\overrightarrow{OG}}$$

On a alors :

$$\vec{R}_C = \frac{d\left((m_1 + m_2)\,\overrightarrow{OG}\right)}{dt}$$

Soit finalement :

$$\boxed{\vec{R}_C = M\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = M\,\vec{v}_G}$$

Ainsi, la résultante du torseur cinétique n'est autre que le vecteur quantité de mouvement que le solide aurait si toute sa masse était rassemblée au point G.

Et ainsi, la résultante du torseur dynamique devient :

$$\boxed{\vec{R}_D = \frac{d\vec{R}_C}{dt} = M\ \vec{a}_G}$$

Comme elle est égale d'autre part à la résultante du torseur des forces extérieures, nous avons donc, la loi bien connue du débutant en Mécanique :

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = M\ \vec{a}_G}$$

L'évolution du centre de gravité ne dépend, autrement dit que la résultante des forces extérieures, pas de la manière dont elles sont appliquées, ce qui expliquait la résolution faite au lycée des problèmes de mécanique, en faisant comme si toutes les forces étaient appliquées au centre de gravité. Mais on obtenait alors que le mouvement du centre d'inertie du système considéré.

Voyons alors comment intervient le centre d'inertie dans la dérivée du moment cinétique.

Considérons d'abord pour cela un point A pouvant être mobile et évaluons le moment cinétique puis sa dérivée en ce point :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\vec{v}_2$$

Donc en dérivant :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} =$$

$$\frac{d\overrightarrow{AM_1}}{dt} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_1} \wedge \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{AM_2}}{dt} \wedge m_2\vec{v}_2 + \overrightarrow{AM_2} \wedge \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt}$$

$$= (\vec{v}_1 - \vec{v}_A) \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 + (\vec{v}_2 - \vec{v}_A) \wedge m_2\vec{v}_2 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{a}_2$$

$$= -\vec{v}_A \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 - \vec{v}_A \wedge m_2\vec{v}_2 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{a}_2$$

$$= -\vec{v}_A \wedge (\,m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) + \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1\vec{a}_1 + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2\,\vec{a}_2$$

$$= -\vec{v}_A \wedge m\,\vec{v}_G + \vec{\Gamma}_A$$

Soit finalement :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{\Gamma}_A - \vec{v}_A \wedge m\,\vec{v}_G}$$

Et en particulier pour le centre d’inertie G, cela donne :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G}$$

Autrement dit, le moment dynamique au centre d’inertie, qu’il soit mobile ou non, est égal à la dérivée du moment cinétique en ce même point.

Résumé :

Etant donné un système formé de N particules matérielles, chacune étant repérée par un indice i, de masse m_i, de position instantanée M_i pouvant évoluer dans le temps, de vecteur vitesse instantané $\vec{v}_i$, de vecteur accélération instantané $\vec{a}_i$ et soumise à une force extérieure au système instantanée $\vec{F}_i^{ext}$, on définit les trois torseurs :

Torseur des efforts extérieurs :

$$\textit{Résultante} : \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext}$$

$$\textit{Moment en A} : \vec{M}(A) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

Torseur cinétique :

$$\textit{Résultante} : \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G$$

$$\textit{Moment en A} : \vec{\sigma}(A) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{v}_i$$

Torseur dynamique :

$$\textit{Résultante} : \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_G$$

$$\textit{Moment en A} : \vec{\Gamma}(A) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}_i$$

Il y a alors identité à tout instant, du torseur des efforts extérieurs et du torseur dynamique

Le torseur dynamique est à tout instant la dérivée du torseur cinétique.

Ces propriétés se traduisent pour un point A invariant dans le temps (donc immobile) par :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{ext} = m\frac{d(\vec{v}_G)}{dt} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\,\vec{v_i}\right)}{dt} \end{cases}$$

Soit en plus compact :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{F} = m\,\vec{a}_G = \dfrac{d(m\,\vec{v}_G)}{dt} \\ \vec{M}(A) = \vec{\Gamma}(\mathrm{A}) = \dfrac{d\vec{\sigma}(\mathrm{A})}{dt} \quad (formule\ valable\ pour\ A\ fixe\ ou\ en\ G\ fixe\ ou\ non) \end{cases}}$$

Et pour sous forme littéraire :

La résultante des efforts extérieurs est égale à la dérivée de la quantité de mouvement d'ensemble

La somme des moments des efforts extérieurs est égale à la dérivée du moment cinétique, et ce en un point fixe du référentiel dans lequel évolue le solide ou bien en son centre d'inertie

Si le point A est mobile la seconde formule devient :

$$\boxed{\vec{M}(A) = \vec{\Gamma}(A) = \frac{d\vec{\sigma}(A)}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\,\vec{v}_G}$$

Si nous prenons pour point A le centre d'inerte G du système, nous avons :

$$\boxed{\vec{M}(G) = \vec{\Gamma}(G) = \frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt}}$$

$\vec{\sigma}(G)$ **est alors appelé moment cinétique propre du système**

Nous retiendrons :

La somme des moments des efforts extérieurs, appliqués à un système matériel, est égale à la dérivée de son moment cinétique propre.