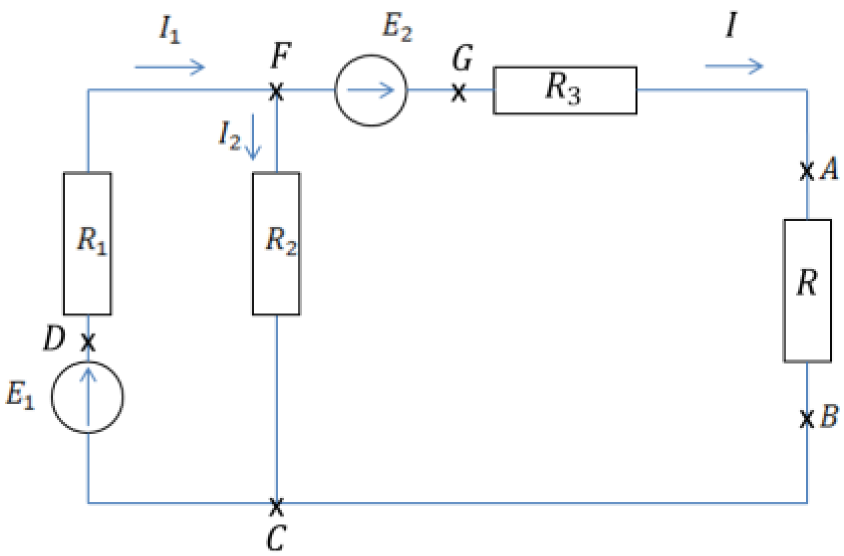
Devoir sur Table AI2 – 12 Juin 2019

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : **Théorème de Thévenin (6 pts)**

On considère le circuit suivant formé de résistors et de générateurs de tension continue :

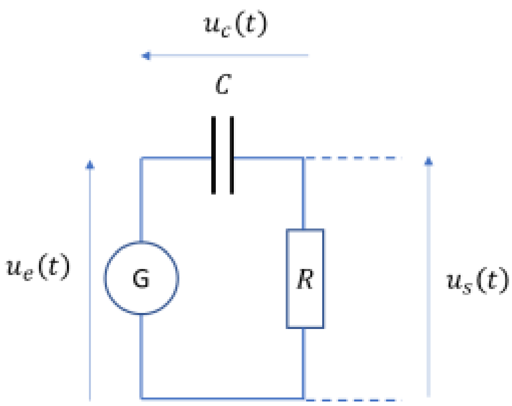


1) Déterminer l'intensité qui traverse le résistor de résistance R en utilisant la méthode systématique (loi des nœuds, loi des mailles,...) et en prenant les valeurs suivantes (3 pts) :

$$R_1 = 50\ \Omega, \qquad R_2 = 100\ \Omega, \qquad R_3 = 200\ \Omega, \qquad R = 100\ \Omega, \qquad E_1 = 12\ V, \qquad E_2 = 6\ V$$

2) Déterminer le générateur de Thévenin équivalent au circuit connecté au résistor de résistance R et retrouver le résultat de la question 1) (on exprimera les caractéristiques du générateur de Thévenin de façon formelle d'abord et on en donnera ensuite les valeurs numériques pour les données du 1). On fera également apparaitre les circuits utilisés pour les calculs (3 pts)

Exercice 2 : **Filtre passif (8 pts)**



On considère le circuit ci-dessus formé d'un générateur de tension G, d'un condensateur de capacité C et d'un résistor de résistance R. La tension délivrée par le générateur peut être produite par un capteur de type microphone, sonde de température, accéléromètre, etc... et est appelée tension d'entrée. La tension aux bornes du résistor est appliquée aux bornes d'un autre dispositif (un amplificateur opérationnel par exemple) sans que cela ne modifie de façon significative l'intensité dans le circuit et est appelée tension de sortie. On se place dans le cas où la tension d'entrée est en fonction du temps t de la forme :

$$u_e(t) = \widehat{U}_e \, cos(\omega \, t)$$

auquel cas, toutes les grandeurs d'intensité et de tension du circuit ont une forme similaire.

- Tension aux bornes du condensateur selon schéma :
$$u_c(t) = \widehat{U}_C \, cos(\omega \, t + \varphi_C)$$
- Tension de sortie (aux bornes du résistor selon schéma) :
$$u_s(t) = \widehat{U}_S \, cos(\omega \, t + \varphi_S)$$
- Intensité dans le circuit selon schéma :
$$i(t) = \hat{I} \, cos(\omega \, t + \varphi_I)$$

a) Expliciter, de façon formelle, les grandeurs complexes $\underline{U_e}, \underline{U_c}$, $\underline{U_S}$, $\underline{I}$ associées aux quatre grandeurs temporelles précédentes (1 pt)

b) Rappeler la définition de l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle de type résistor, condensateur ou inductance et donner les expressions pour chacun de ces trois types en fonction de la pulsation ω et des caractéristiques de chaque dipôle R, L ou C et dire ce que représente son module Z (2 pts).

c) En utilisant un pont diviseur de tension ainsi les grandeurs complexes, déterminer la fonction de transfert de ce dispositif, définie par (2 pts) :

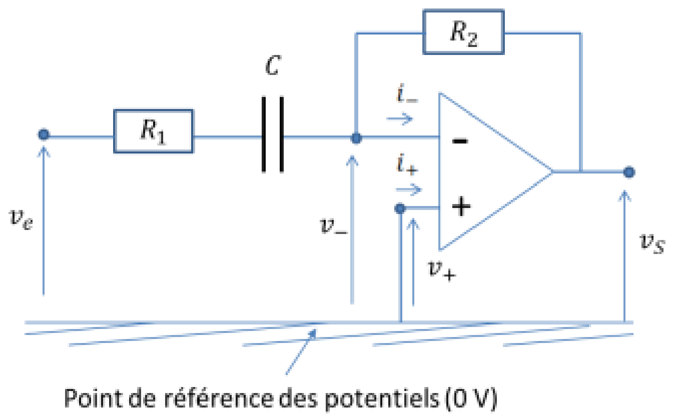
$$\underline{H}(j \, \omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$$

d) Représenter l'allure du module de cette fonction de transfert en fonction de ω et en déduire à quel type de filtre ce dispositif correspond (on étudiera pour cela les variations de la fonction et on calculera les limites en 0 et en +∞). (2 pts)

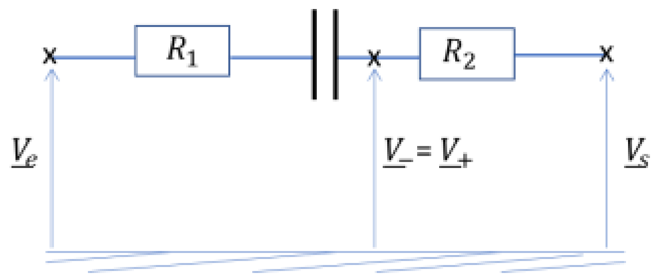
e) Déterminer la fréquence de coupure f_C en Hz et donner l'allure simplifiée de la courbe précédente (1pt)

Exercice 3 : Filtre actif (6 pts)

On considère le circuit suivant constitué de deux résistors de résistances R_1 et R_2 , d'un condensateur de capacité C et d'un amplificateur opérationnel idéal :



On rappelle les caractéristiques d'un amplificateur opérationnel idéal fonctionnant dans son domaine linéaire : les courants entrant sur les entrées inverseuses (-) et non inverseuse (+) sont négligeables devant les courants traversant les résistors. On peut alors faire apparaitre les différents dipôles sur un pont diviseur de tension, en considérant les grandeurs complexes pour une tension d'entrée v_e de la forme $v_e(t) = \hat{V}_e\, cos(\omega\, t)$:



1) Déterminer la fonction de transfert de ce dispositif, à savoir (2 pts) :

$$\underline{H}(j\,\omega) = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}}$$

et montrer que son module est :

$$H(j\,\omega) = \frac{R_2}{R_1}\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{R_1\,C}\right)^2}}$$

2) Donner l'allure de son module en fonction de ω et identifier le type de filtre ainsi réalisé ainsi que ses caractéristiques (fréquence de coupure) (2 pts)

3) Quel avantage présente un filtre actif par rapport à un filtre passif ? (1 pt)

4) On souhaite réaliser un filtre de fréquence de coupure 1000 Hz et tel que l'amplitude de la tension de sortie soit dix fois celle la tension d'entrée. On dispose d'un condensateur de capacité 1 mF. Déterminer les valeurs de R_1 et R_2 qu'il faut choisir pour réaliser ce filtre (1 pt).

Correction :

Exercice 1 :

1) maille C D F : La loi d'additivité des tensions s'écrit : $U_{CD} + U_{DF} + U_{FC} = 0$ donne :

$$\boxed{-E_1 + R_1\, I_1 + R_2\, I_2 = 0}$$

Maille C F G A B C : $U_{CF} + U_{FG} + U_{GA} + U_{AB} + U_{BC} = 0$ donne :

$$\boxed{-R_2\, I_2 - E_2 + R_3\, I + R\, I = 0}$$

Loi des nœuds :

$$\boxed{I_1 = I_2 + I}$$

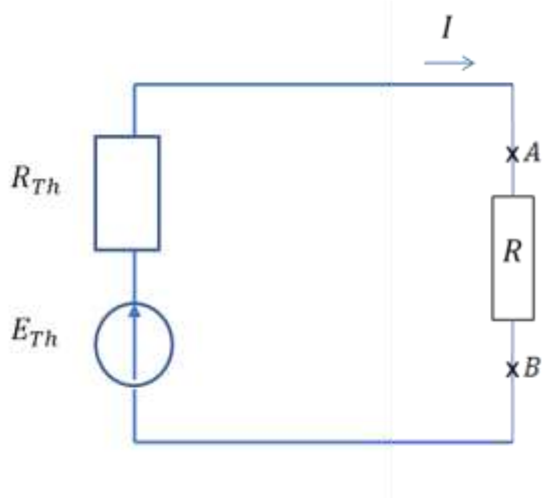
Avec les valeurs numériques, on aboutit au système :

$$\begin{cases} 50\, I_1 + 100\, I_2 = 12 \\ -100\, I_2 + 300\, I = 6 \\ I_1 = I_2 + I \end{cases}$$

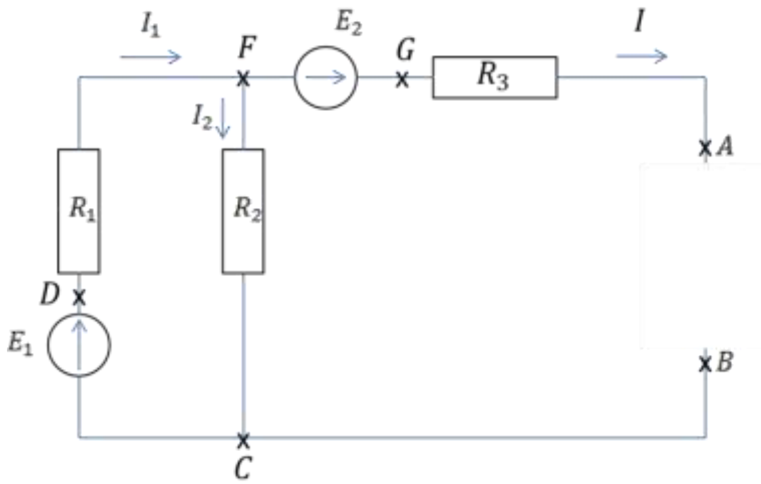
Dont la résolution conduit à :

$$\boxed{I = 0{,}042\ A = 42\ mA}$$

2) Circuit avec générateur de Thévenin équivalent :



1ère étape : Calcul de $E_{Th} = U_{AB}$ en circuit ouvert :



On a d'une part :

$$U_{AB} = U_{AG} + U_{GF} + U_{FC} + U_{CB} = E_2 + R_2\, I_2$$

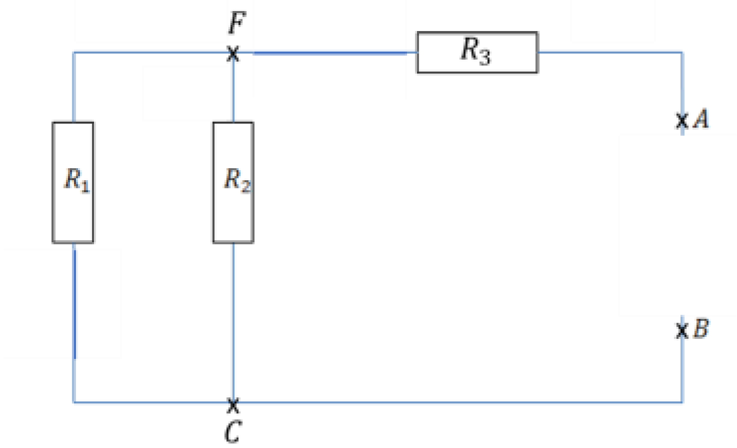
D'autre part, en utilisant la loi de Pouillet :

$$I_2 = \frac{E_1}{R_1 + R_2}$$

Donc :

$$\boxed{E_{Th} = E_2 + R_2\, \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{(R_1 + R_2)\, E_2 + R_2\, E_1}{R_1 + R_2}}$$

2ème étape : Calcul de R_{Th} résistance équivalente du dipôle de Thévenin à forces électromotrices éteintes.



$$\boxed{R_{Th} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} + R_3}$$

On applique la loi de Pouillet au circuit équivalent de Thévenin :

$$I = \frac{E_{Th}}{R + R_{Th}} = \frac{(R_1 + R_2)\, E_2 + R_2\, E_1}{R_1 + R_2} \times \frac{1}{R + \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} + R_3}$$

$$\boxed{I = \frac{(R_1 + R_2)\, E_2 + R_2\, E_1}{(R_1 + R_2)(R + R_3) + R_1\, R_2}}$$

Application numérique :

$$I = \frac{150 \times 6 + 100 \times 12}{150 \times 300 + 50 \times 100} = 0{,}042\ A$$

On retrouve bien le résultat du 1)

Exercice 2 :

a)

$$\underline{U_e} = \hat{U}_e, \qquad \underline{U_c} = \hat{U}_C\, e^{j\,\varphi_c}\ , \qquad \underline{U_s} = \hat{U}_s\, e^{j\,\varphi_s}\,, \qquad \underline{I} = \hat{I}\, e^{j\,\varphi_I}$$

b) L'impédance complexe d'un dipôle passif de bornes A et B est le quotient de la tension complexe par l'intensité complexe

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U_{AB}}}{\underline{I_{AB}}}$$

Impédances à une pulsation ω :

- Résistor de résistance R :

$$\underline{Z} = R$$

- Bobine d'inductance L :

$$\underline{Z} = j\, L\, \omega$$

- Condensateur de capacité C :

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\, C\, \omega}$$

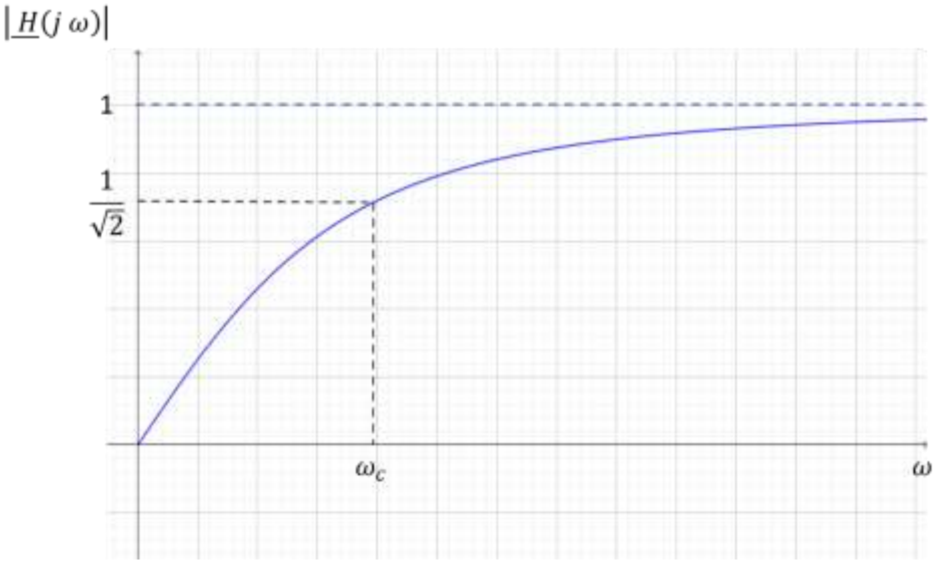
c)

$$\underline{H}(j\,\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\, C\, \omega}} = \frac{j}{\frac{1}{R\, C\, \omega} + j}$$

d)

$$\left|\underline{H}(j\,\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R\,C\,\omega}\right)^2 + 1}}$$

C'est une fonction strictement croissante de ω et qui a pour limites en 0^+ : 0 et en $+\infty$: 1. L'allure de la courbe est la suivante :



Il s'agit donc d'un filtre passe haut.

e) La valeur maximum de $\left|\underline{H}(j\,\omega)\right|$ étant 1, la pulsation de coupure se détermine en résolvant :

$$\left|\underline{H}(j\,\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R\,C\,\omega}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{R\,C\,\omega} = 1$$

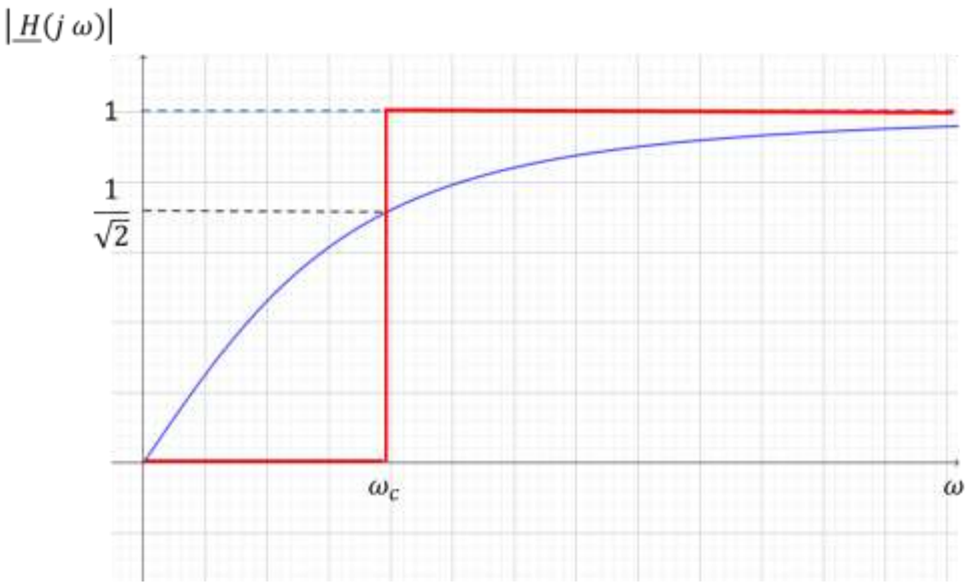
Donc :

$$\omega_c = \frac{1}{R\,C}$$

Et pour la fréquence de coupure :

$$\boxed{f_c = \frac{\omega_c}{2\,\pi} = \frac{1}{2\,\pi\,R\,C}}$$

L'allure simplifiée de la courbe est alors (en rouge sur la figure) :



Exercice 3 :

1)En notant $\underline{Z_1}$ l'impédance du dipôle formé de l'association en série du résistor R_1et du condensateur, l'application du pont diviseur de tension donne :

$$\underline{V_S} - \underline{V_-} = \frac{R_2}{\underline{Z_1} + R_2}\left(\underline{V_S} - \underline{V_e}\right)$$

où :

$$\underline{Z_1} = R_1 + \frac{1}{j\,C\,\omega}$$

En outre, l'AOP étant idéal, on a :

$$\underline{V_-} = \underline{V_+} = 0$$

Ainsi :

$$\left(\underline{Z_1} + R_2\right)\underline{V_S} = R_2\left(\underline{V_S} - \underline{V_e}\right)$$

$$\underline{Z_1}\ \underline{V_S} = -R_2\,\underline{V_e}$$

D'où :

$$\underline{H}(j\,\omega) = -\frac{R_2}{\underline{Z_1}} = -\frac{R_2}{\underline{R_1 + \frac{1}{j\,C\,\omega}}} = -j\,\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\frac{1}{R_1\,C\,\omega} + j}$$

$$\left|\underline{H}(j\,\omega)\right| = \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1\,C\,\omega}\right)^2 + 1}}$$

Cette fonction a la même allure que celle du filtre précédent et sa valeur maximum est $\frac{R_2}{R_1}$. Il s'agit donc d'un filtre passe haut de fréquence de coupure :

$$\boxed{f_c = \frac{1}{2\,\pi\,R_1\,C}}$$

3) Le filtre actif permet d'amplifier la tension d'entrée du facteur $\frac{R_2}{R_1}$ tout en la filtrant.

4) On détermine R_1 par :

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{2\,\pi\,f_c\,C} = \frac{1}{2\,\pi\;\times 1000 \times 10^{-3}} = \frac{1}{2\,\pi} \approx 0{,}159\,\Omega}$$

Puis $R_2 = 1{,}59\,\Omega$