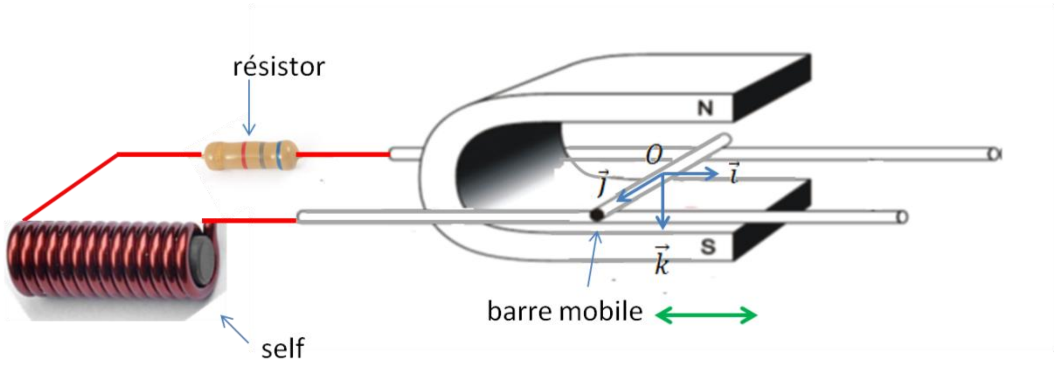
Devoir sur Table AI2 – 22 Juin 2019

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : **<u>Générateur de courant alternatif (11 pts)</u>**

On reprend le dispositif du rail de Laplace avec une barre conductrice pouvant se déplacer perpendiculairement à deux rails placés dans l'entrefer d'un aimant en fer à cheval et espacés d'une distance $d = 5\ cm$, mais au lieu de fermer le circuit sur un générateur, on le ferme sur un résistor de résistance $R = 10\ \Omega$ mis en série avec une self idéale d'inductance $L = 0{,}1\ H$ comme indiqué sur le schéma



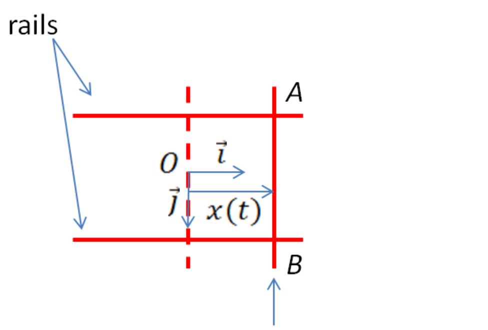
Le champ régnant dans l'espace où peut se déplacer la barre est supposé constant d'intensité $1\ mT = 0{,}001\ T$ et décrit dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ fixe par rapport à l'aimant sous la forme :

$$\overrightarrow{B_1} = B_1\,\vec{k}$$

On impose alors à la barre mobile un mouvement alternatif selon l'axe $(O, \vec{\imath})$ défini par :

$$x(t) = x_0\,sin\,(\omega\,t)$$

où t est le temps exprimé en secondes et $x_0 = 2\ cm,\ \ \omega = 10\,\pi\,rad\,s^{-1}$



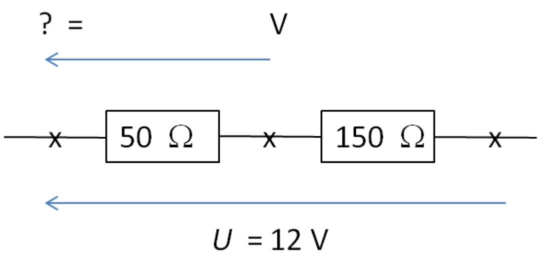
1) Donner l'expression de la composante $v = dx/dt$ de la vitesse de la barre sur le vecteur unitaire $\vec{\imath}$ en fonction de x_0 , ω et t (1 pt)
2) En déduire l'expression littérale de la force de Lorentz agissant sur les électrons libres de la barre et justifier que la barre se comporte comme un générateur de courant alternatif en précisant sur le schéma ci-dessus le sens du courant lorsque $v > 0$ (1,5 pt)
3) Définir le champ électromoteur au sein de la barre mobile et donner son expression vectorielle en fonction des paramètres de l'énoncé. Indiquer sur un schéma son sens dans le cas où $v > 0$ (1 pt)
4) En déduire que la force électromotrice e_{BA} de ce générateur a une expression en fonction du temps de la forme $e_{BA} = e_0 \; cos \; (\omega \; t + \varphi)$ avec $e_0 > 0$ en donnant d'abord les expressions littérales de e_0 et de φ en fonction $B_1, d, \omega, \; x_0$ puis leurs valeurs numériques (1,5 pt)
5) Justifier, à l'aide d'un schéma faisant apparaitre les forces agissant sur un électron mobile et en supposant négligeable la résistance de la barre , la relation :
$$U_{AB} = -e_{AB} = e_{BA}$$
où U_{AB} désigne la tension entre les points A et B de la barre (1 pt)
6) Dessiner le circuit électrique avec les symboles normalisés (1 pt)
7) Montrer que le courant I allant de B vers A dans la barre mobile, c'est à dire au sein du générateur, ou bien de A vers B à travers le résistor et la self vérifie l'équation différentielle :
$$e_{BA} = R \; I + L \; \frac{dI}{dt}$$
où $e_{BA} = -e_{AB}$

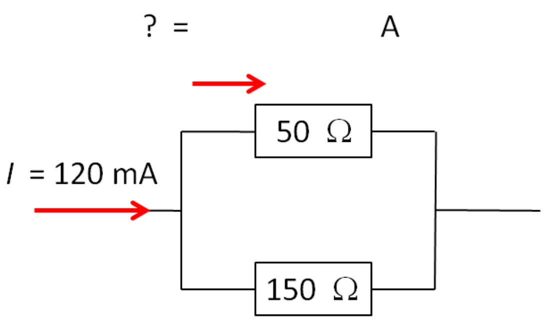
   On explicitera bien les relations tension-courant pour chaque dipôle ainsi que les noms des lois employées (1,5 pt)

8) Mettre cette équation sous une forme normalisée (0,5 pt)
9) Donner sous forme d'expression littérale la solution de régime permanent en déterminant la solution particulière de l'équation avec second membre et en utilisant les grandeurs complexes puis faire l'application numérique (2 pts)

Exercice 2 : **Ponts diviseurs de tension_ diviseurs de courant (2 pts)**

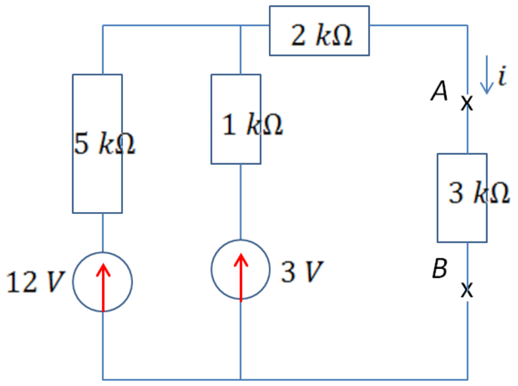
Par un calcul direct, compléter les schémas avec les valeurs de tension ou d'intensité indiquées par un point d'interrogation (on détaillera le calcul) :





Exercice 3 : **Circuit électrique – Théorème de Thevenin (7 pts)**

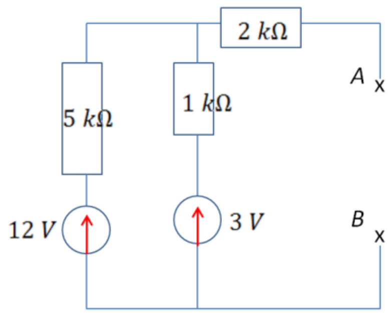
Soit le circuit suivant :



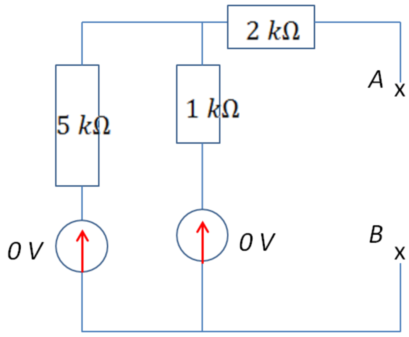
1) En appliquant la loi des nœuds et la loi des mailles, déterminer les intensités dans chaque branche et en déduire l'intensité i qui traverse le résistor de résistance $3\ k\Omega$ (2 pts)

On se propose de retrouver l'intensité i en appliquant le théorème de Thévenin :

2) Déterminer la fém de thévenin c'est-à-dire la tension entre A et B associée au circuit ouvert entre ces deux bornes (1,5 pt) :



3) Déterminer la résistance équivalente du circuit entre A et B à fém éteintes (autrement dit générateurs court-circuités) (1,5 pt)



4) Faire alors le schéma du circuit avec la mise en série du dipôle de Thévenin équivalent et de la résistance de 3 $k\Omega$ (1 pt)
5) En déduire par la loi de Pouillet l'intensité i traversant cette résistance (1 pt)

Correction

Exercice 1 :

1) On a :

$$x(t) = x_0 \, sin\,(\omega\, t)$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \omega\ \ x_0 \, cos\,(\omega\, t)$$

2) Les électrons de la barre rendus mobiles par le déplacement de cette dernière sont soumis à une force de Lorentz de la forme :

$$\vec{F} = -e\,\vec{v}\ \wedge \overrightarrow{B_1} == -e\,v\,\vec{\imath} \wedge B_1\,\vec{k} = e\,v\,B_1\,\vec{\jmath}$$

3) Le champ électromoteur est défini par :

$$\overrightarrow{E_m} = \ \vec{v}\ \wedge \overrightarrow{B_1} = -v\,B_1\,\vec{\jmath}$$

4) Par définition, on a :

$$e_{BA} = \int_{B\to A} \overrightarrow{E_m}\ \cdot d\vec{M} = \overrightarrow{E_m}\ \cdot \overrightarrow{BA} = -v\,B_1\,\vec{\jmath} \cdot -d\ \vec{\jmath} = v\,B_1\,d = \ B_1\,d\,\omega\ \ x_0 \, cos\,(\omega\, t)$$

Ainsi :

$$e_0 = B_1\,d\,\omega\ \ x_0\,, \qquad \varphi = 0$$

Soit numériquement :

$$e_0 = 0{,}001 \times\ 0{,}05 \times\ 10\,\pi \times\ \ 0{,}02 = 3{,}1 \times 10^{-5}\,V = 31\,\mu V$$

5) Un électron mobile est soumis à deux forces :

- Une force électromotrice $\vec{F} = -e\,\vec{E}_m$ où $\vec{E}_m$ désigne le champ électromoteur
- Une force électrostatique : $\overrightarrow{F_S} = -e\,\vec{E}_S$ où $\vec{E}_S$ désigne le champ électrostatique

En négligeant l'inertie de l'électron, la loi de Newton s'écrit :

$$\overrightarrow{F_S} + \vec{F} = \vec{0}$$

Soit :

$$= -e\,\vec{E}_S - e\,\vec{E}_m = \vec{0}$$

ou encore, en divisant par la charge de l'électron :

$$\vec{E}_S + \vec{E}_m = \vec{0}$$

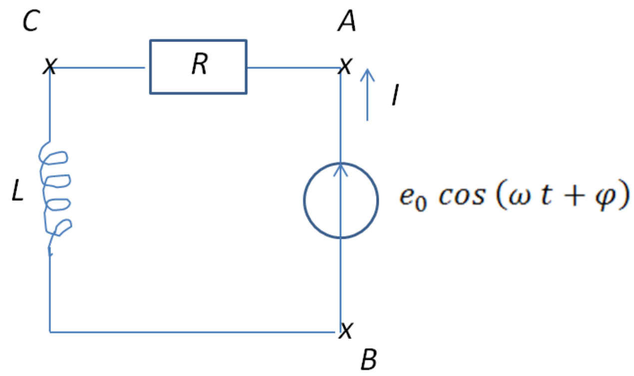
Puis en intégrant la relation sur une ligne de courant de la barre entre A et B :

$$\int_{A\to B} \overrightarrow{E_m}\ \cdot d\vec{M} + \int_{A\to B} \overrightarrow{E_s}\ \cdot d\vec{M} = 0$$

Il en découle :

$$U_{AB} + e_{AB} = 0$$

6) Schéma du circuit :



La loi d'additivité des tensions donne :

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$$

La loi d'Ohm donne pour le résistor :

$$U_{AC} = R\, I$$

L'inductance obéit à la loi :

$$U_{CB} = L\, \frac{dI}{dt}$$

Ainsi :

$$e_{BA} = R\, I + L\, \frac{dI}{dt}$$

7) L'équation normalisée est :

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\, I = \frac{e_0}{R}\, cos\,(\omega\, t)$$

8) Pour trouver la solution de régime permanent, on introduit la grandeur complexe d'intensité $\bar{I}$ qui vérifie l'équation :

$$R\,\bar{I} + j\, L\, \omega\, \bar{I} = e_0$$

Soit :

$$\bar{I} = \frac{e_0}{R + j\, L\, \omega}$$

L'amplitude de I est alors donnée par :

$$\hat{I} = |\bar{I}| = \frac{e_0}{\sqrt{R^2 + L^2\, \omega^2}} = \frac{B_1\, d\, \omega\;\, x_0}{\sqrt{R^2 + L^2\, \omega^2}} = \frac{3{,}1 \times 10^{-5}}{\sqrt{10^2 + 10^{-2} \times 10^2\, \pi^2}} \approx 3{,}0 \times 10^{-6}\, A = 3{,}0\, \mu A$$

Et la phase par :

$$\varphi_I = \arg(\bar{I}) = -arg(R + j\,L\,\omega)$$

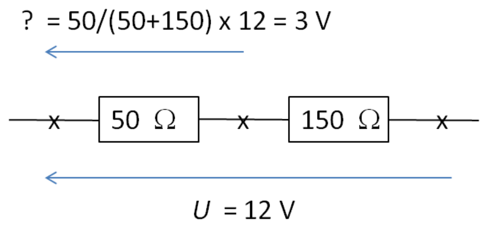
Soit :

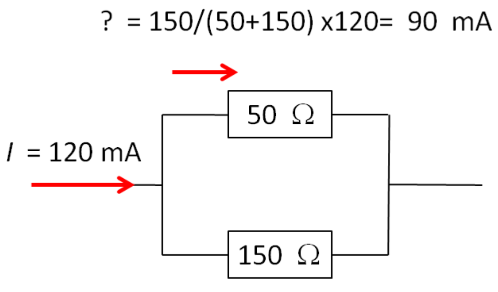
$$\varphi_I = tan^{-1}\left(\frac{L\,\omega}{R}\right) = tan^{-1}\left(\frac{0{,}1 \times\ 10\,\pi}{10}\right) \approx 0{,}30\,rad$$

L'intensité est alors :

$$I = \bar{I}\,cos(\omega\,t + \varphi_I) = 3{,}0 \times 10^{-6}\,cos(10\,\pi\,t + 0{,}30)$$

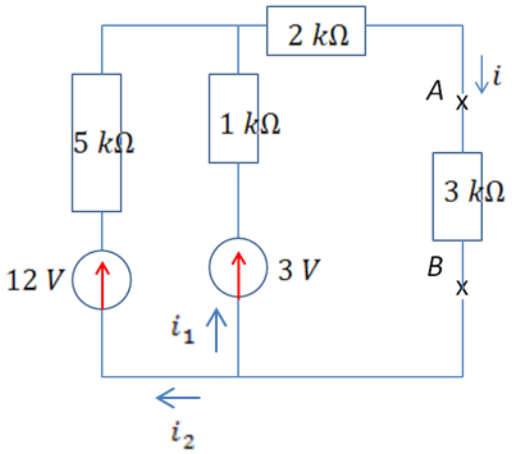
Exercice 2





Exercice 3

Choisissons les sens conventionnels des courants de branche i_1 et i_2 tels que définis sur la figure :



et écrivons les lois de deux mailles du circuit ainsi qu'une loi de nœud :

$$\begin{cases} -1000\ i_1 + 3 - 12 + 5000\ i_2 = 0 \\ 2000\ i + 3000\ i - 3 + 1000\ i_1 = 0 \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

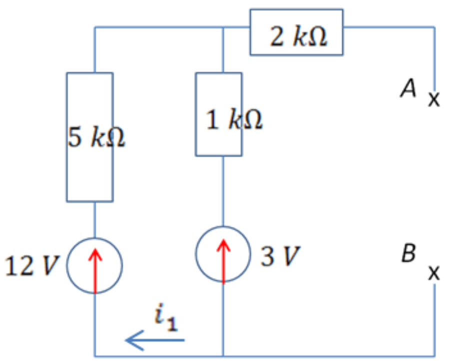
Soit :

$$\begin{cases} -\ i_1 + 5\ i_2 = 9 \times 10^{-3} \\ 5\ (i_1 + i_2) +\ i_1 = 3 \times 10^{-3} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\ i_1 + 5\ i_2 = 9 \times 10^{-3} \\ 6\ i_1 +\ 5\ i_2 = 3 \times 10^{-3} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = -\dfrac{6}{7} \times 10^{-3} \approx -0{,}86\ mA \\ i_2 = \dfrac{57}{35} \times 10^{-3} \approx 1{,}63\ mA \\ i = \dfrac{27}{35} \times 10^{-3} \approx 0{,}77\ mA \end{cases}$$

2)



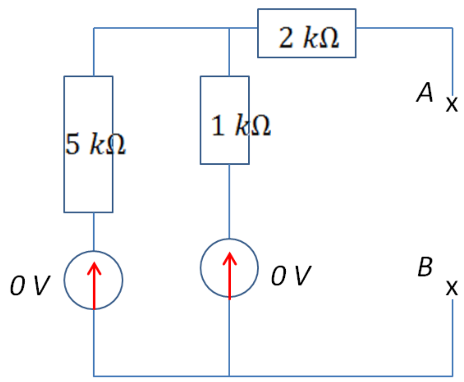
L'intensité qui circule dans l'unique maille est, d'après la loi de Pouillet, avec la convention choisie :

$$i_1 = \frac{12 - 3}{5000 + 1000} = 1{,}5 \times 10^{-3} = 1{,}5\ mA$$

On en déduit la fém de Thevenin :

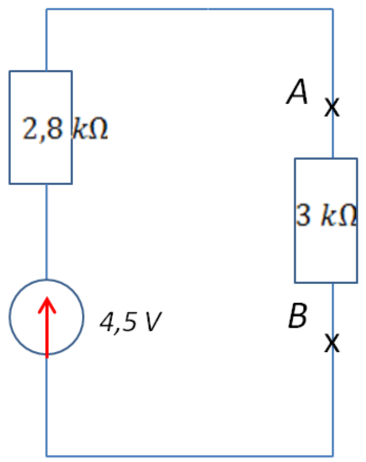
$$E_{th} = U_{AB} = 2000 \times 0 + 1000 \times i_1 + 3 = 1{,}5 + 3 = 4{,}5\ V$$

3)



La résistance équivalente est obtenue par mise en série d'une résistance de $2\ k\Omega$ d'un dipôle formé d'une résistance de $5\ k\Omega$ en parallèle avec une résistance de $1\ k\Omega$, soit :

$$R_{th} = 2 + \frac{5 \times 1}{5 + 1} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6} \approx 2{,}8\ k\Omega$$



5)

La loi de Pouillet donne alors :

$$i = \frac{E_{th}}{R_{th} + 3000} = \frac{4,5}{\left(\frac{17}{6} + 3\right) \times 10^3} \approx 0,77\ mA$$

On retrouve bien le même résultat qu'au 1)