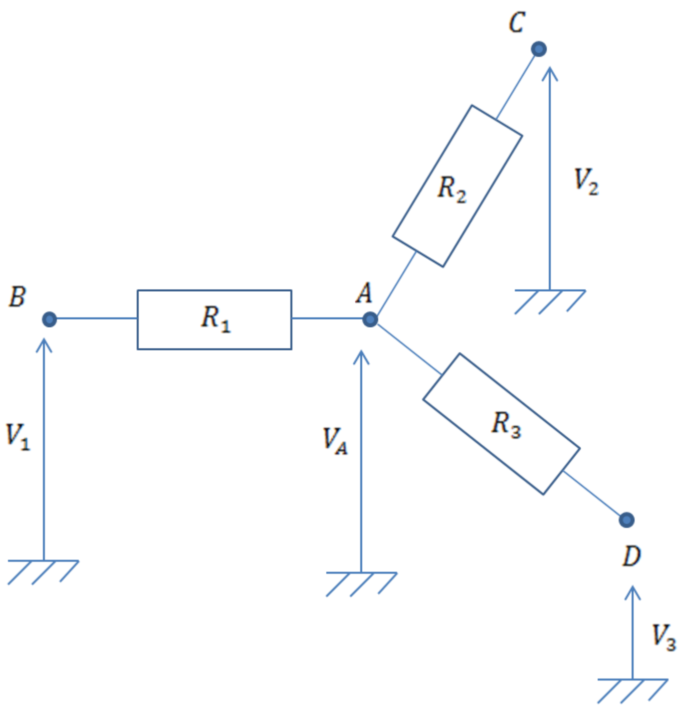
Contrôle d'électricité- AI2 –Juin 2017

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : théorème de Millman (3 points)

Soit un réseau de trois résistors aboutissant à un même nœud A tel que défini par la figure ci-dessous :



1) En appliquant la loi du nœud A pour les intensités qui y aboutissent, montrer que l'on a :

$$V_A = \frac{G_1\,V_1 + G_2\,V_2 + G_3\,V_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

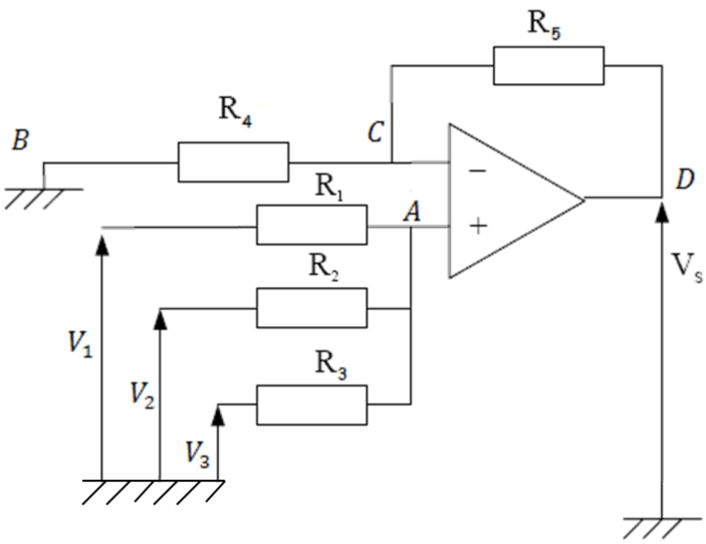
Où G_1, G_2, G_3 désignent les conductances :

$$G_i = \frac{1}{R_i} \quad , i = 1 \text{ à } 3$$

2) Généraliser cette relation à n résistances aboutissant au nœud A

Exercice 2 : Amplificateur opérationnel additionneur (5 points)

Soit le circuit suivant :



L'amplificateur étant considéré comme idéal, on peut considérer face aux autres potentiels que l'on a :

$$V_A - V_C = 0$$

et les courants i^+ et i^-entrant respectivement aux bornes + et − de l'amplificateur différentiel sont négligeables (donc considérés comme nuls) face aux autres courants.

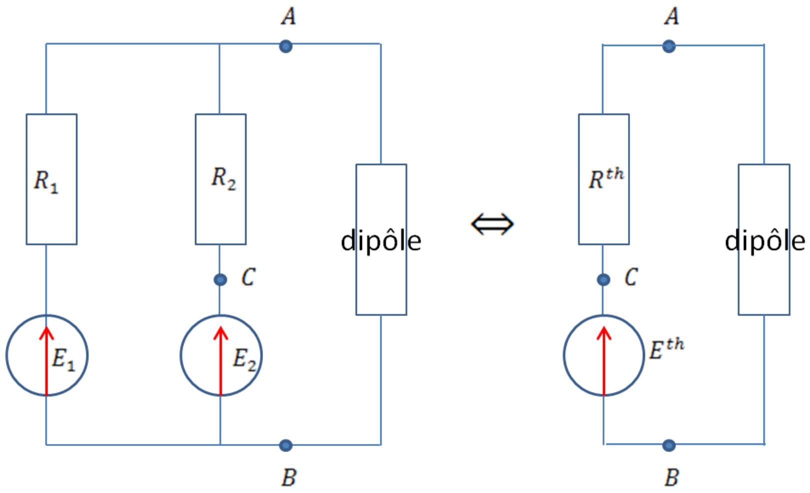
1) En appliquant le théorème de Millman vu à l'exercice 1) exprimer V_A en fonction de V_1, V_2, V_3 et des conductances G_1, G_2, G_3 associées respectivement aux résistances R_1, R_2, R_3
2) En notant que la branche $B - C - D$ du circuit est un pont diviseur de tension, exprimer V_C en fonction de R_4, R_5 et $V_s = V_D$
3) En déduire la tension de sortie V_s en fonction de $V_1, V_2, V_3, R_1, R_2, R_3$
4) Quelle condition faut il avoir sur R_1, R_2, R_3 pour que V_s soit de la forme :

$$V_s = k \ (V_1 + V_2 + V_3)$$

Donner alors dans ce cas la valeur de k et quelle relation doit il y avoir entre R_4 et R_5 pour obtenir une valeur de k égale à 10

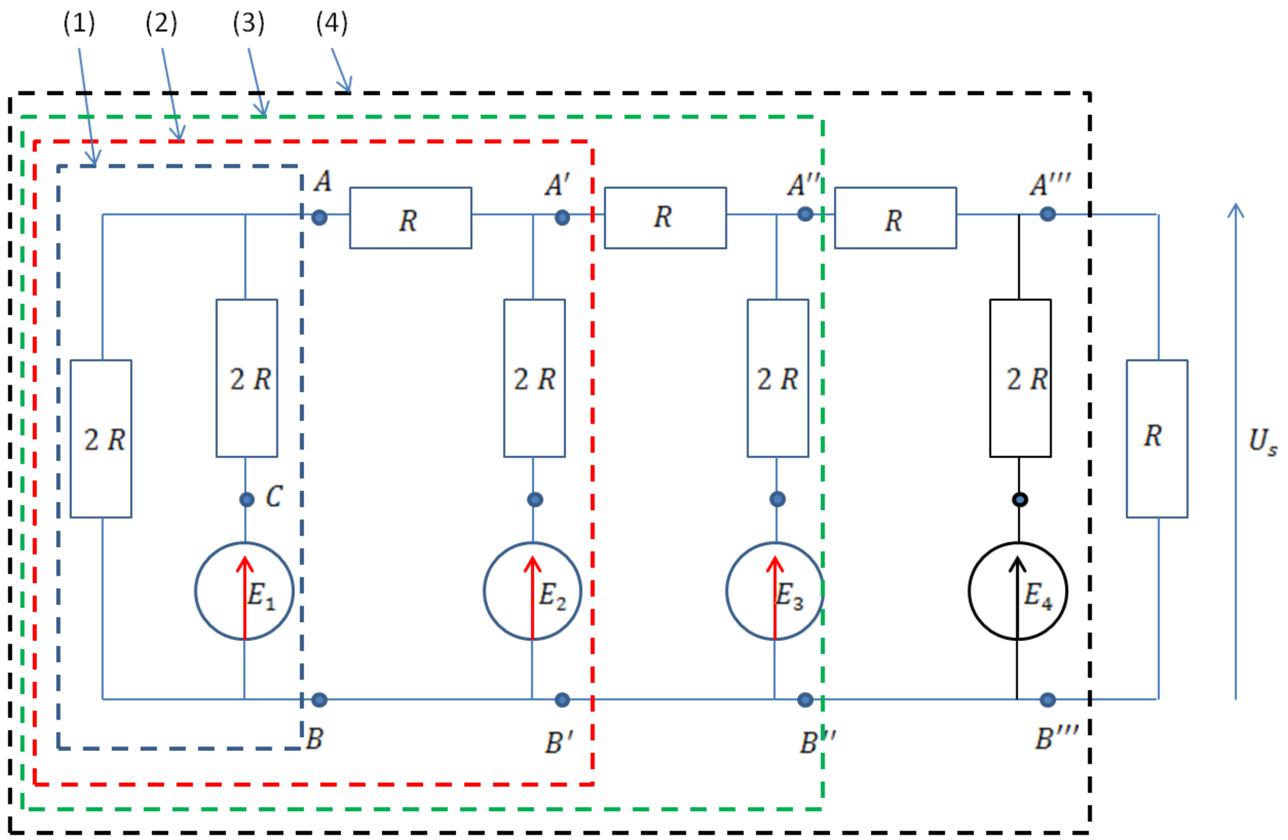
Exercice 3 : Théorème de Thévenin (5 points)

1) Soit un circuit électrique constitué de deux résistors R_1 et R_2 et deux forces électromotrices E_1 et E_2 et formant un dipôle connecté aux deux bornes A et B d'un autre dipôle. Déterminer les caractéristiques E^{th} et R^{th} du générateur de thévenin équivalent selon le schéma ci-dessous :



2) Application à un convertisseur numérique analogique.

On considère le circuit suivant :



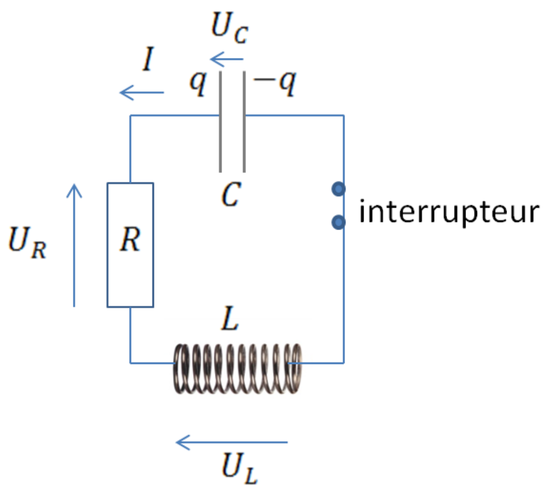
a) Déterminer les caractéristiques du générateur de thévenin équivalent au circuit de bornes A et B entouré en pointillé bleu (1) en utilisant les résultats de la question 1) et dessiner le nouveau circuit équivalent (on regroupera les résistances en série en une seule équivalente)

b) Recommencer le procédé pour déterminer le générateur de thévenin équivalent au circuit de bornes A' et B' en pointillé rouge (2) puis au circuit de bornes A'' et B'' en pointillé vert (3) et enfin au circuit de bornes A''' et B''' en pointillé noir (4)

c) En déduire la tension de sortie U_s en fonction de E_1, E_2, E_3, E_4 et R

Exercice 4 : oscillations libres d'un circuit RLC (7 points)

Soit un circuit composé d'un résistor de résistance R mis en série avec une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C avec une charge initiale lui conférant une tension $U_C(0) = U_0$. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.



1) Etablir une relation entre l'intensité I du circuit et la charge q du condensateur tels que décrits sur le schéma puis en déduire I en fonction de C et de la tension U_C aux bornes du condensateur
2) Etablir une relation entre la tension U_R aux bornes de la résistance, la tension U_C et la résistance R
3) Etablir une relation entre la tension U_L aux bornes de la bobine, la tension U_C aux bornes du condensateur et l'inductance L
4) En appliquant une loi de maille, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension du condensateur et la résoudre sachant qu'au moment de la fermeture du circuit, l'intensité $I(0)$ dans le circuit est nulle.
5) Donner les caractéristiques des oscillations, période, fréquence

Corrigé

Exercice 1

1) Notons I_1, I_2, I_3 les intensités traversant respectivement R_1, R_2, R_3 et aboutissant au nœud A. La loi du nœud donne :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Soit :

$$G_1\,(V_1 - V_A) + G_2\,(V_2 - V_A) + G_3\,(V_3 - V_A) = 0$$

$$G_1\,V_1 + G_2\,V_2 + G_3\,V_3 = (G_1 + G_2 + G_3)\,V_A$$

d'où :

$$V_A = \frac{G_1\,V_1 + G_2\,V_2 + G_3\,V_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

2) Pour n résistances cela donne :

$$V_A = \frac{G_1\,V_1 + G_2\,V_2 + \cdots + G_n\,V_n}{G_1 + G_2 + \cdots + G_n}$$

Exercice 2

1) Le théorème de Millman appliqué au nœud A donne :

$$V_A = \frac{G_1\,V_1 + G_2\,V_2 + G_3\,V_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

2) Par appliquant de la règle du pont diviseur de tension , on a :

$$U_{BC} = \frac{R_4}{R_4 + R_5}\,U_{BD}$$

Donc :

$$V_C - V_B = \frac{R_4}{R_4 + R_5}\,(V_D - V_B)$$

sachant $V_B = 0$ soit :

$$\boxed{V_C = \frac{R_4}{R_4 + R_5}\,V_S}$$

3) Ecrivons l'égalité de V_A et V_C

$$\frac{R_4}{R_4 + R_5}\ V_S = \frac{G_1\ V_1 + G_2\ V_2 + G_3\ V_3}{G_1 +\ G_2 +\ G_3}$$

On en tire :

$$V_S = \frac{R_4 + R_5}{R_4}\ \frac{G_1\ V_1 + G_2\ V_2 + G_3\ V_3}{G_1 +\ G_2 +\ G_3}$$

Soit :

$$\boxed{V_S = \frac{R_4 + R_5}{R_4}\ \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$$

4) La condition est :

$$R_1 = R_2 = R_3$$

Dans ce cas :

$$\boxed{V_S = \frac{R_4 + R_5}{3\ R_4}\ (V_1 +\ V_2 +\ V_3)}$$

Le gain d'amplification est donc :

$$k = \frac{R_4 + R_5}{3\ R_4}$$

et pour qu'il soit égal à 10 il faut avoir :

$$\frac{R_4 + R_5}{3\ R_4} = 10$$

Soit :

$$\boxed{R_5 = 29\ R_4}$$

<u>Exercice</u> 3

1) La résistance de thévenin est la résistance équivalente du circuit à force électromotrice éteinte, soit deux résistances en parallèle donc :

$$\boxed{R^{th} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}}$$

La force électromotrice de thévenin E^{th} est égale à la tension U_{AB} obtenue en déconnectant le circuit aux bornes A et B. En appliquant la loi de Pouillet, on obtient l'intensité du courant traversant la résistance R_2 de C vers A :

$$I = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}$$

On en déduit par la loi d'additivité des tensions :

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB}$$

$$= -R_2\, I + E_2 = -R_2\, \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} + E_2$$

Soit :

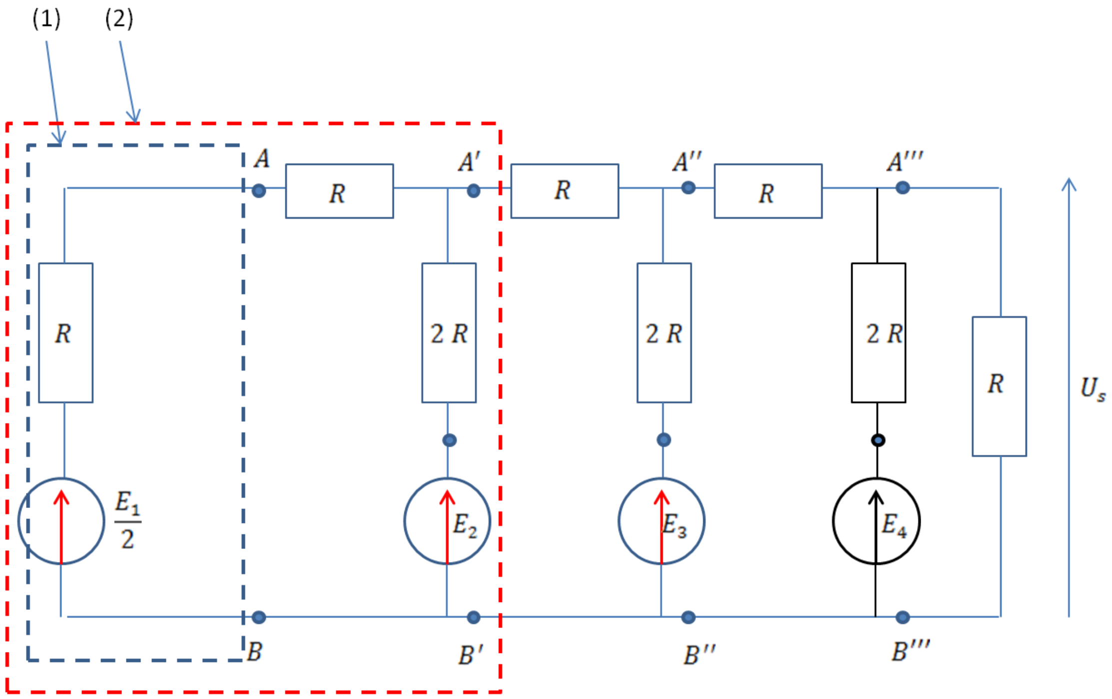
$$\boxed{E^{th} = U_{AB} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, E_2}$$

2) Application

a) Les caractéristiques du générateur de Thévenin équivalent sont :

$$\boxed{\begin{gathered} R^{th1} = \frac{2\,R\, \times 2\,R}{2\,R + 2\,R} = R \\ E^{th1} = \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R} E_1 = \frac{E_1}{2} \end{gathered}}$$

Le circuit équivalent est alors :

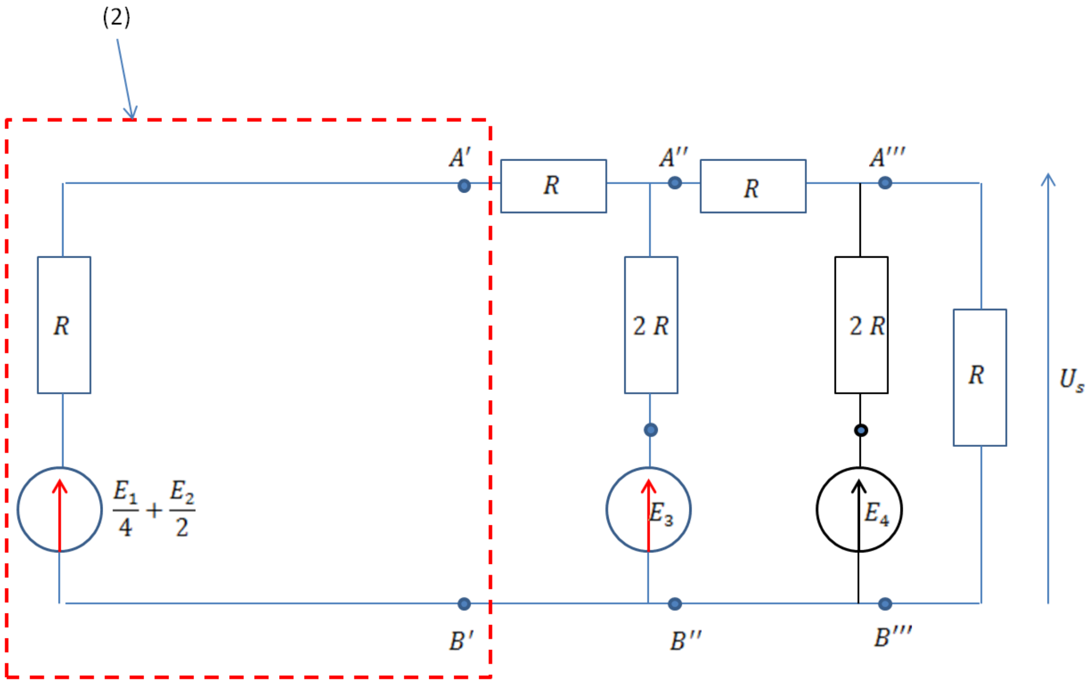


Les deux résistances R en série étant équivalentes à une résistance $2\,R$, nous pouvons remplacer le circuit (2) par un générateur de Thévenin de caractéristiques :

$$R^{th2} = \frac{2\,R \times 2\,R}{2\,R + 2\,R} = R$$

$$E^{th2} = \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R}\frac{E_1}{2} + \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R}E_2 = \frac{E_1}{4} + \frac{E_2}{2}$$

Le circuit équivalent est alors :

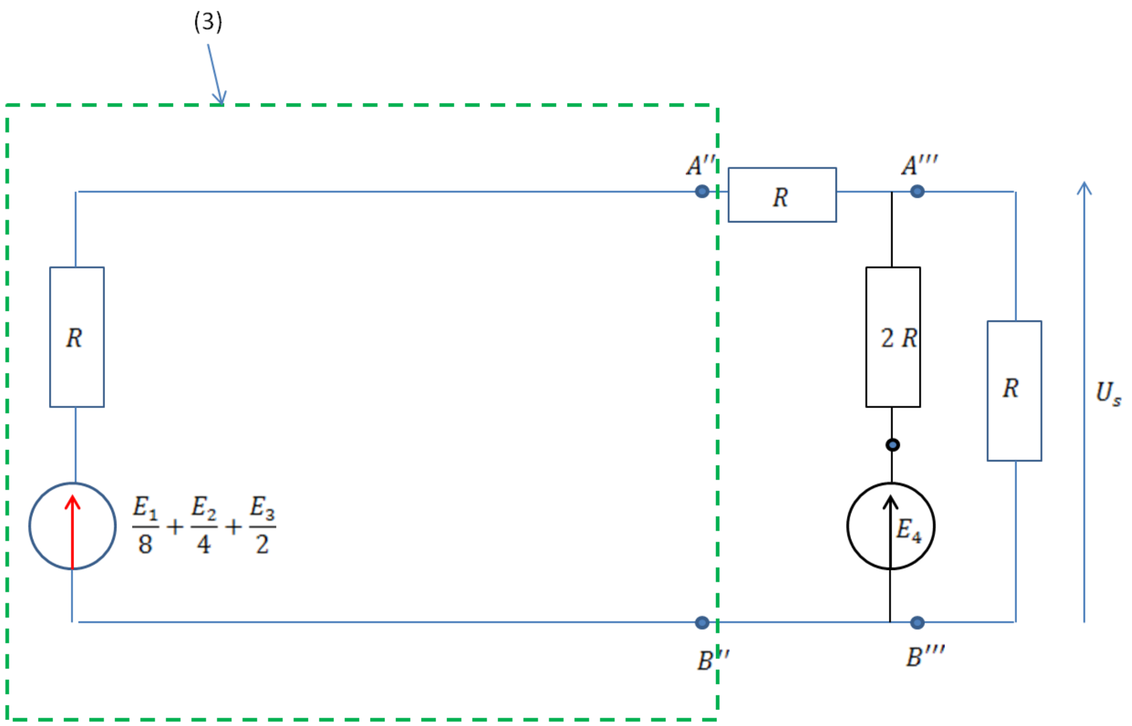


A nouveau, les deux résistances R en série étant équivalentes à une résistance $2\,R$, nous pouvons remplacer le circuit (3) par un générateur de Thévenin de caractéristiques :

$$R^{th2} = \frac{2\,R\ \times 2\,R}{2\,R + 2\,R} = R$$

$$E^{th2} = \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R}\left(\frac{E_1}{4} + \frac{E_2}{2}\right) + \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R}E_3 = \frac{E_1}{8} + \frac{E_2}{4} + \frac{E_3}{2}$$

Le circuit équivalent est alors :

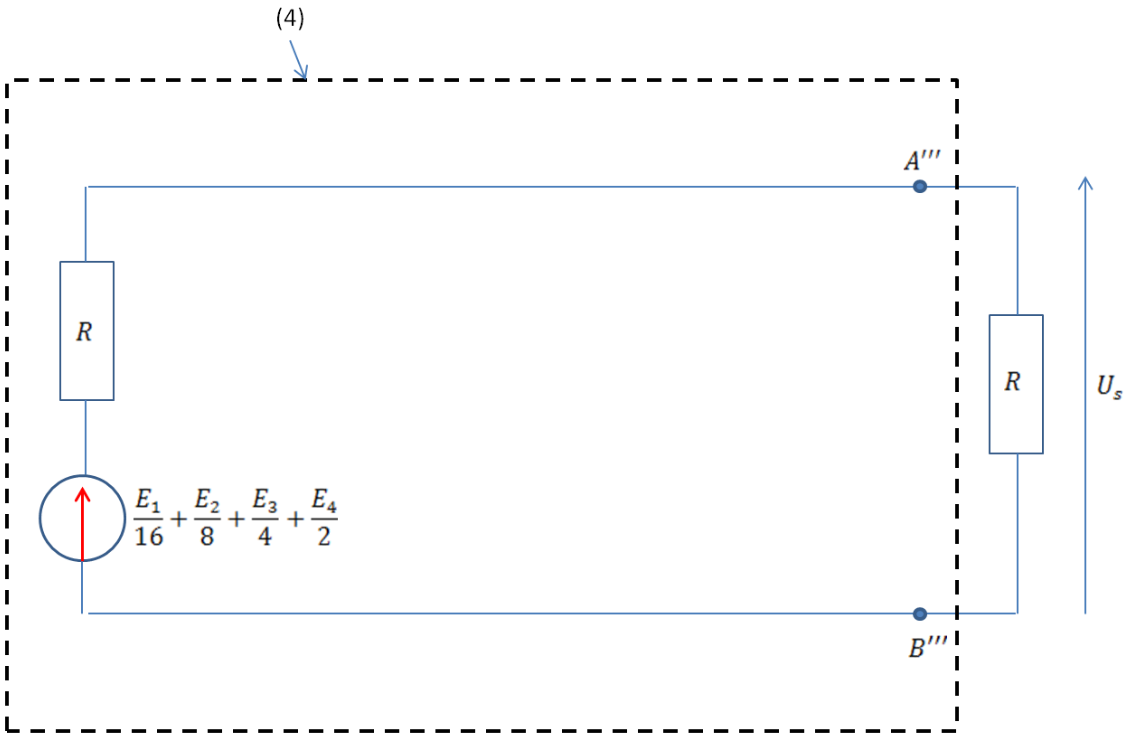


Finalement, les deux résistances R en série étant équivalentes à une résistance $2\,R$, nous pouvons remplacer le circuit (4) par un générateur de Thévenin de caractéristiques :

$$R^{th2} = \frac{2\,R\ \times 2\,R}{2\,R + 2\,R} = R$$

$$E^{th2} = \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R}\left(\frac{E_1}{8} + \frac{E_2}{4} + \frac{E_3}{2}\right) + \frac{2\,R}{2\,R + 2\,R}E_4 = \frac{E_1}{16} + \frac{E_2}{8} + \frac{E_3}{4} + \frac{E_4}{2}$$

Le circuit équivalent est alors :



La loi de Pouillet donne alors l'intensité du courant dans le sens indiqué par la force électromotrice :

$$I = \frac{1}{2\,R}\left(\frac{E_1}{16} + \frac{E_2}{8} + \frac{E_3}{4} + \frac{E_4}{2}\right)$$

La tension U_s s'en déduit :

$$\boxed{U_s = R\,I = \frac{E_1}{32} + \frac{E_2}{16} + \frac{E_3}{8} + \frac{E_4}{4}}$$

<u>Exercice</u> 4 :

1)

$$I = -\frac{dq}{dt} = -C\,\frac{dU_C}{dt}$$

2)

$$U_R = R\,I = -R\,C\,\frac{dU_C}{dt}$$

3)

$$U_L = L\,\frac{dI}{dt} = -L\,C\,\frac{d^2U_C}{dt^2}$$

4) La loi de Maille donne :

$$U_C - U_L - U_R = 0$$

$$U_C + L\ C\ \frac{d^2U_C}{dt^2} + R\ C\ \frac{dU_C}{dt} = 0$$

Soit, en normalisant l'équation :

$$\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\ \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{L\ C}\ U_C = 0$$

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\ C}}$$

$$2\ \alpha = \frac{R}{L}$$

L'équation devient :

$$\boxed{\frac{d^2U_C}{dt^2} + 2\ \alpha\ \frac{dU_C}{dt} + {\omega_0}^2\ U_C = 0}$$

La solution générale de cette équation est :

$$U_C = e^{-\alpha\, t}\left(A\ cos(\omega_0\ t) + B\ sin(\omega_0\ t)\right)$$

Soit :

$$\frac{dU_C}{dt} =$$

$$-\alpha\ e^{-\alpha\, t}\left(A\ cos(\omega_0\ t) + B\ sin(\omega_0\ t)\right) + e^{-\alpha\, t}\left(-A\ \omega_0\ sin(\omega_0\ t) + B\ \omega_0\ cos(\omega_0\ t)\right)$$

$$= e^{-\alpha\, t}\left((-\alpha\ A + B\ \omega_0)\ cos(\omega_0\ t) + (-\alpha\ B - A\ \omega_0)\ sin(\omega_0\ t)\right)$$

Avec les conditions initiales :

$$U_C(0) = U_0\ , \frac{dU_C}{dt}(0) = 0$$

Donc :

$$A = U_0$$

et :

$$-\alpha\, A + B\, \omega_0 = 0$$

soit :

$$B = \frac{\alpha\, U_0}{\omega_0}$$

D'où :

$$\boxed{U_C = U_0\, e^{-\alpha\, t} \left(cos(\omega_0\, t) + \frac{\alpha}{\omega_0}\, sin(\omega_0\, t) \right)}$$

5) Il s'agit d'une fonction sinusoïdale de période

$$T_0 = \frac{2\, \pi}{\omega_0} = 2\, \pi\, \sqrt{L\, C}$$

et de fréquence :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\, \pi\, \sqrt{L\, C}}$$