Devoir surveillé 2 : AI2 – 2020

Mathématiques (L.Gry)

Exercice 1 : Noyau d'un endomorphisme (4 pts)

On note $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles et on considère l'application ϕ suivante de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie pour toute suite U de terme général U_n par :

$$\phi(U) = V$$

où la suite V est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n+2}$$

1) Montrer que ϕ est linéaire

2) Déterminer le noyau de ϕ ainsi que sa dimension (on exhibera une base)

3) Montrer que ϕ est surjective et en déduire l'image de ϕ

Exercice 2 : Matrice d'une application linéaire de polynômes (7 pts)

On note $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et on considère l'application ϕ suivante de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie pour tout polynôme $P(X)$de $\mathbb{E}$ par :

$$\phi(P(X)) = P(X+1) - P(X-1)$$

Note : Les questions 5) et 6) peuvent être traitées indépendamment du reste

1) Vérifier par l'analyse du degré de $\phi(P(X))$ que ϕ est bien définie.

2) Montrer que ϕ est linéaire et déterminer son noyau et son image ainsi que les dimensions de ces derniers en exhibant une base pour chacun.

3) Donner la matrice A de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{E}$

4) Montrer que $A^3 = 0$. Que vaut A^{2021} ?

5) Déterminer les valeurs propres de A de deux manières :

a) en cherchant les racines du polynôme caractéristique de A, $\pi_A(X)$ qui est le déterminant de la matrice $A - X\, I_3$

b) en se servant de la propriété $A^3 = 0$.

6) Déterminer les sous espaces propres associés et en déduire si la matrice A est diagonalisable .

Exercice 3 : Inverse d'une matrice (3 pts)

Inverser, par la méthode du pivot de Gauss, la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 4 : Endomorphisme de matrices (6 pts)</u>

On note $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{E}$ défini par :

$$\phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le noyau et l'image de ϕ en exhibant pour chacun une base.

2) Déterminer la matrice A de ϕ relativement à la base canonique de $\mathbb{E}$ qui est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

3) Déterminer les valeurs propres de ϕ en cherchant les réels λ pour lesquels il existe une matrice carrée d'ordre 2 non nulle $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que :

$$\phi(X) = \lambda\, X$$

Puis déterminer les sous espaces propres associés et en déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = P\, D\, P^{-1}$$

Expliquer, sans calculer, comment on en déduirait une expression explicite pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ des coefficients de A^n.

Correction

<u>Exercice</u> 1 :

1)

Soit $(U, V, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\phi(U + \alpha\, V) = W$$

Avec W telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : W_n = (U + \alpha\, V)_{n+2} = U_{n+2} + \alpha\, V_{n+2}$$

Donc :

$$\phi(U + \alpha\, V) = \phi(U) + \alpha\, \phi(\,V)$$

2)

$$U \in Ker(\phi) \Leftrightarrow\ \phi(U) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ U_{n+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ n \geq 2 \Rightarrow U_n = 0$$

Donc $Ker(\phi)$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang 2 c'est-à-dire :

$$Ker(\phi) = \{U = (a, b, 0,0, \dots) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = Vect[(1,0,0,0, \dots), (0,1,0,0, \dots)]$$

Le noyau est donc de dimension 2.

3)

Soit $V \in \mathbb{E}$ alors on peut définir $U \in \mathbb{E}$ par :

$$U_0 = U_1 = 0$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\} :\ U_n = V_{n-2}$$

Alors :

$$V = \phi(U)$$

Ainsi, ϕ est surjective et $Im(\phi) = \mathbb{E}$

<u>Exercice</u> 2 :

1) Le degré de $P(X + 1)$ est au plus 2 et celui de $P(X - 1)$ également donc il en va de même pour leur différence

2) Soit $(P(X), Q(X), \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\phi\big(P(X) + \alpha\, Q(X)\big) = P(X + 1) + \alpha\, Q(X + 1) - \big(P(X - 1) + \alpha\, Q(X - 1)\big)$$

$$= P(X+1) - P(X-1) + \alpha\left(Q(X+1) - Q(X-1)\right)$$

$$= \phi\big(P(X)\big) + \alpha\, \phi\big(Q(X)\big)$$

Posons $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2$, alors :

$$\phi\big(P(X)\big) = a_0 + a_1\,(X+1) + a_2\,(X+1)^2 - (a_0 + a_1\,(X-1) + a_2\,(X-1)^2)$$

$$= 2\, a_1 + \; 4\, a_2\, X$$

Ainsi :

$$P(X) \in Ker(\phi) \Leftrightarrow \phi\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\, a_1 = 0 \\ 4\, a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \; a_1 = a_2 = 0$$

Donc :

$$Ker(\phi) = Vect[1]$$

C'est une droite vectorielle.

Le théorème du rang indique alors :

$$dim\big(Im(\phi)\big) = dim(\mathbb{E}) - dim\big(Ker(\phi)\big) = 3 - 1 = 2$$

De plus :

$$\phi(1) = 0$$

$$\phi(X) = 2$$

$$\phi(X^2) = 4\, X$$

Donc :

$$Im(\phi) = Vect[\phi(1), \phi(X), \phi(X^2)] = Vect[2{,}4\, X] = Vect[1, X]$$

3) A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \;\; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{2021} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) a) On a :

$$Det(A - X\,I_3) = \begin{vmatrix} -X & 2 & 0 \\ 0 & -X & 4 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3$$

La matrice n'admet que 0 pour valeur propre.

b) Supposons λ valeur propre de A alors il existe une colonne X non nulle telle que :

$$A\,X = \lambda\,X$$

Donc :

$$A^2\,X = A\,A\,X = A\,\lambda\,X = \lambda\,A\,X = \lambda^2\,X$$

$$A^3\,X = A\,A^2 X = A\,\lambda^2\,X = \lambda^2 A\,X = \lambda^3\,X$$

Soit :

$$\lambda^3\,X = 0$$

Donc :

$$\lambda^3 = 0$$

$$\lambda = 0$$

0 est donc la seule valeur propre de A.

6) Le sous espace propre associé à 0 est le noyau de dimension 2. La matrice n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 3 :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On inverse le système :

$$\begin{cases} 2\,x - y + z = x' \\ x + y + 3\,z = y' \\ -x + 2\,y - 4\,z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - y + z = x' \\ -3\,y - 5\,z = x' - 2\,y' \\ 3\,y - 7\,z = x' + 2\,z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - y + z = x' \\ -3\,y - 5\,z = x' - 2\,y' \\ -12\,z = 2\,x' - 2\,y' + 2\,z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(x' - \frac{1}{18}\,x' + \frac{7}{18}\,y' + \frac{5}{18}\,z' + \frac{1}{6}\,x' - \frac{1}{6}\,y' + \frac{1}{6}\,z'\right) = \frac{5}{9}\,x' + \frac{1}{9}\,y' + \frac{2}{9}\,z' \\ y = -\frac{1}{3}\left(x' - 2\,y' - \frac{5}{6}\,x' + \frac{5}{6}\,y' - \frac{5}{6}\,z'\right) = -\frac{1}{18}\,x' + \frac{7}{18}\,y' + \frac{5}{18}\,z' \\ z = -\frac{1}{6}\,x' + \frac{1}{6}\,y' - \frac{1}{6}\,z' \end{cases}$$

Donc :

$$P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & 2 & 4 \\ -1 & 7 & 5 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

On vérifie $P\,P^{-1} = I$

<u>Exercice</u> 4 :

1)

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Ker(\phi) \Leftrightarrow \ \phi(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-d=0 \\ b-c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$$

Donc :

$$Ker(\phi) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} :\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Le noyau est donc de dimension 2. Le théorème du rang donne alors :

$$dim\big(Im(\phi)\big) = dim(\mathbb{E}) - dim\big(Ker(\phi)\big) = 4 - 2 = 2$$

Or :

$$\phi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et :

$$Im(\phi) = Vect\left[\phi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \phi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= Vect\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$= Vect\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

2) La matrice est :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3)

$$\phi(X) = \lambda\, X \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a-d & b-c\\ c-b & d-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\, a & \lambda\, b\\ \lambda\, c & \lambda\, d\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)\, a = d\\ (1-\lambda)\, b = c\\ (1-\lambda)\, c = b\\ (1-\lambda)\, d = a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)^2\, d = d\\ (1-\lambda)^2\, c = c\\ (1-\lambda)\, c = b\\ (1-\lambda)\, d = a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)^2 = 1\\ d = d\\ c = c\\ (1-\lambda)\, c = b\\ (1-\lambda)\, d = a\end{cases} ou \begin{cases}(1-\lambda)^2 \neq 1\\ d = 0\\ c = 0\\ 0 = b\\ 0 = a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda = 0\\ \\ c = b\\ d = a\end{cases} ou \begin{cases}\lambda = 2\\ \\ -c = b\\ -d = a\end{cases} ou\ X = 0$$

L'endomorphisme a donc pour valeurs propres 0 et 2 et les sous espaces propres associés sont :

$$\mathbb{E}_0 = Ker(\phi) = Vect\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$\mathbb{E}_2 = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix} :\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

4)

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^n = P\, D^n\, P^{-1}$$