Devoir surveillé AI2 – 2020

Mathématiques

Exercice 1 : Noyau d'un endomorphisme (3 pts)

On note $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des suites réelles et on considère l'application ϕ suivante de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie pour toute suite U de terme général U_n par :

$$\phi(U) = V$$

Où la suite V est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : V_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$$

1) Montrer que ϕ est linéaire

2) Déterminer le noyau de ϕ

3) Montrer que ϕ est surjective et en déduire l'image de ϕ

Exercice 2 : Matrice d'une application linéaire de polynômes (7 pts)

On note $\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et on considère l'application ϕ suivante de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie pour tout polynôme $P(X)$de $\mathbb{E}$ par :

$$\phi(P(X)) = X\,P'(X) + P(-X)$$

Note : Les questions 5) et 6) peuvent être traitées indépendamment du reste

1) Vérifier par l'analyse du degré de $\phi(P(X))$ que ϕ est bien définie.

2) Montrer que ϕ est linéaire et déterminer son noyau et son image ainsi que les dimensions de ces derniers en exhibant une base pour chacun.

3) Donner la matrice A de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{E}$

Sans calculs, donner les valeurs propres de ϕ

4) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique dans la base $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$

6) Calculer son inverse P^{-1}

7) En déduire la matrice B de ϕ dans la base $(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$

Exercice 3 : Puissance d'une matrice (4 pts)

On note $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit A et B deux matrices de $\mathbb{E}$ qui commutent. On admet qu'on peut leur appliquer la formule du binôme pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

On rappelle qu'une matrice A de $\mathbb{E}$ est nilpotente d'indice $m \in \mathbb{N}^*$ si : $A^m = 0,\ A^{m-1} \neq 0$

1) Montrer que si A est nilpotente d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ alors pour tout entier $k \geq m$: $A^k = 0$

2) On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que A est nilpotente et préciser son indice de nilpotence

b) Montrer que A et B commutent

c) En déduire les expressions explicites des coefficients de $(A+B)^p$

Exercice 4 : Inverse d'une matrice (2 pts)

On note $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On note I la matrice carrée identité d'ordre n

1) Soit A une matrice vérifiant (0_n étant la matrice nulle d'ordre n) :

$$A^3 - A = 0_n$$

Prouver que si A est inversible, alors A est une matrice de symétrie ($A^2 = I$)

2)) Soit A une matrice vérifiant :

$$A^3 - A = I$$

Montrer que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I

Exercice 5 : Diagonalisation d'une matrice (4 pts)

Soit A une matrice carrée d'ordre 2

1) Montrer que :

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - Tr(A)\,\lambda + det(A)$$

2) En déduire les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis déterminer les sous espaces propres associés et en déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

En déduire enfin une expression explicite pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ de A^n

Correction

<u>Exercice</u> 1 :

1)

Soit $(U, V, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\phi(U + \alpha\, V) = W$$

Avec W telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : W_n = \sum_{k=0}^{n} (U + \alpha\, V)_k = \sum_{k=0}^{n} U_k + \alpha \sum_{k=0}^{n} V_k$$

Donc :

$$\phi(U + \alpha\, V) = \phi(U) + \alpha\, \phi(\, V)$$

2)

$$U \in Ker(\phi) \Leftrightarrow\; \phi(U) = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; \sum_{k=0}^{n} U_k = 0$$

$$\Leftrightarrow\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; U_n = 0 \;\; \text{(par récurrence évidente)}$$

Donc $Ker(\phi)$ est réduit à la suite nulle.

3)

Soit $V \in \mathbb{E}$ alors on peut définir $U \in \mathbb{E}$ par :

$$U_0 = V_0$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\; U_n = V_n - V_{n-1}$$

Ainsi, par somme télescopique :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\; \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k = V_0 + \sum_{k=0}^{n} (V_k - V_{k-1}) = V_0 + V_n - V_0 = V_n$$

Donc :

$$V = \phi(U)$$

Ainsi, ϕ est surjective et $Im(\phi) = \mathbb{E}$

Exercice 2 :

1) Le degré de $X\,P'(X)$ est au plus 3 et celui de $P(-X)$ également donc il en va de même pour leur somme

2) Soit $(P(X), Q(X), \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\phi\big(P(X) + \alpha\,Q(X)\big) = X\,\big(P'(X) + \alpha\,Q'(X)\big) + \big(P(-X) + \alpha\,Q(-X)\big)$$
$$= X\,P'(X) + P(-X) + X\,Q'(X) + Q(-X)$$
$$= \phi\big(P(X)\big) + \alpha\,\phi\big(Q(X)\big)$$

Posons $P(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2 + a_3\,X^3$, soit : $P'(X) = a_1 + 2\,a_2\,X + 3\,a_3\,X^2$ donc :

$$\phi\big(P(X)\big) = X\,(a_1 + 2\,a_2\,X + 3\,a_3\,X^2) + a_0 - a_1\,X + a_2\,X^2 - a_3\,X^3$$
$$= a_0 + 3\,a_2\,X^2 + 2\,a_3\,X^3$$

Ainsi :

$$P(X) \in Ker(\phi) \Leftrightarrow \phi\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ 3\,a_2 = 0 \\ 2\,a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ a_0 = a_2 = a_3 = 0$$

Donc :

$$Ker(\phi) = Vect[X]$$

C'est une droite vectorielle.

Le théorème du rang indique alors :

$$dim\big(Im(\phi)\big) = dim(\mathbb{E}) - dim\big(Ker(\phi)\big) = 4 - 1 = 3$$

De plus :

$$\phi(1) = 1$$
$$\phi(X) = 0$$
$$\phi(X^2) = 3\,X^2$$
$$\phi(X^3) = 2\,X^3$$

Donc :

$$Im(\phi) = Vect[\phi(1), \phi(X^2), \phi(X^3)] = Vect[1, X^2, X^3]$$

3) A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les éléments diagonaux à savoir 0,1,2,3

4)

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5) Les colonnes de P sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) On inverse le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = x' \\ y + 2\,z + 3\,t = y' \\ z + 3\,t = z' \\ t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - y' + z' - t' \\ y = y' - 2\,z' + 3\,t' \\ z = z' - 3\,t' \\ t = t' \end{cases}$$

Donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie $P\,P^{-1} = I$

7)

$$B = P^{-1}\,A\,P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1) Par récurrence sur k, la propriété étant initialisée pour $k = m$. On la suppose vraie au rang $k \geq m$, soit $A^k = 0$ alors $A^{k+1} = A\, A^k = A\, 0 = 0$. Donc la propriété est vraie au rang $k + 1$

2) a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 0$$

Donc A est nilpotente d'indice 3

b)

$$A\, B = B\, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$(A + B)^0 = I$$

$$(A + B)^1 = A + B$$

Et pour $p \geq 2$

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{2} \binom{p}{k}\, A^k\, B^{p-k}$$

$$= \binom{p}{0}\, A^0\, B^p + \binom{p}{1}\, A^1\, B^{p-1} + \binom{p}{2}\, A^2\, B^{p-2}$$

$$= B^p + p\, A\, B^{p-1} + \frac{p\,(p-1)}{2}\, A^2\, B^{p-2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{p-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p-1} \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{p\,(p-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{p-2} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{p-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p-2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p\, 2^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & p\, 2^{p-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & p\,(p-1)\, 2^{p-3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^p & p\, 2^{p-1} & p\,(p-1)\, 2^{p-3} \\ 0 & 2^p & p\, 2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> 4 :

1) si alors A est inversible, on peut multiplier la relation par A^{-1}

$$A^{-1}(A^3 - A) = A^{-1} 0_n$$

Qui donne :

$$A^2 - I = 0$$

Soit :

$$A^2 = I$$

2) on factorise A :

$$A\,(A^2 - I) = I$$

On en déduit que A est inversible et que :

$$A^{-1} = A^2 - I$$

<u>Exercice</u> 5 :

1) Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda\, I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\,(d-\lambda) - b\,c = \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (a\,d - b\,c)$$

$$= \lambda^2 - Tr(A)\,\lambda + det(A)$$

2) Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme :

$$det(A - \lambda\, I) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A)$$

$$= \lambda^2 - 2\,\lambda - 3$$

Le déterminant valant 16, les racines s'en déduisent :

$$\lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1, \;\; \lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3$$

Détermination des sous espaces propres :

$\mathbb{E}_{\lambda_1}$: On résout :

$$(A - \lambda_1\, I)\, X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\; x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \ y = -x$$

Donc :

$$\mathbb{E}_{\lambda_1} = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

$\mathbb{E}_{\lambda_2}$: On résout :

$$(A - \lambda_2 \, I) \, X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + y = 0$$

$$\Leftrightarrow \ y = x$$

Donc :

$$\mathbb{E}_{\lambda_2} = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P \, D^n \, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^n + 3^n & -(-1)^n + 3^n \\ -(-1)^n + 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}$$