Contrôle de Mathématiques AI2 –Décembre 2018

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Endomorphisme de polynômes (8 pts)

On se place dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 : $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 : (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ de base canonique $(1, X, X^2)$ et on définit l'application :

$$f: \quad \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

$$P(X) \to \int_0^1 P(t)dt + \left(\int_0^1 t\,P'(t)dt\right) X + \left(\int_0^1 t^2\,P''(t)dt\right) X^2$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$
2) Déterminer le noyau $N(f)$ de f
3) En déduire le rang de f puis une base de l'image $Im(f)$ de f
4) Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{E}$
5) Déterminer les valeurs propres de f et les sous espaces propres associés. On donnera pour ces derniers une base.
6) En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que : $A = P\,D\,P^{-1}$
7) Calculer, pour tout entier naturel n, A^n (on donnera une expression de chacun de ses coefficients en fonction de n)

Exercice 2 : Valeurs propres –vecteurs propres d'une matrice inverse (3 pts)

On considère une matrice carrée d'ordre n inversible A.

1) Montrer que 0 n'est pas valeur propre de A
2) Montrer que l'on a :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ valeur propre de } A^{-1}$$

3) On note :

$$\mathbb{E}_{A,\lambda} = \{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) : A\,X = \lambda\,X\}$$
$$\mathbb{E}_{A^{-1},\frac{1}{\lambda}} = \{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) : A^{-1}\,X = \lambda\,X\}$$

Quelle relation y-a-t-il entre ces deux ensembles ?

4) En déduire que si A est diagonalisable alors son inverse A^{-1} l'est aussi.
5) On suppose $A = P\,D\,P^{-1}$ avec D matrice diagonale d'ordre n dont la diagonale est formée par les n valeurs propres non nulles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes) et P matrice inversible d'ordre n.

Mettre A^{-1} sous une forme analogue : $A^{-1} = Q\, D'\, Q^{-1}$. On précisera la matrice inversible Q et les éléments diagonaux de la matrice diagonale D'

Exercice 3 : Famille de vecteurs (3 points)

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Les deux familles suivantes sont elles libres ou liées ? :

$$\{x, x+1, 2\,x+1\}$$

$$\{Ln(x), Ln(x+1)\,, Ln(2\,x+1)\}$$

(Pour la seconde famille, on pourra partir d'une combinaison linéaire nulle et penser à dériver)

Exercice 4 : Endomorsphisme de matrices (6 points)

On se place dans $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et on considère le sous-ensemble :

$$\mathbb{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1) Montrer que $\mathbb{V}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$
2) Déterminer une base de $\mathbb{V}$ et en déduire la dimension de $\mathbb{V}$
3) On rappelle que la base canonique de $\mathbb{E}$ est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On considère l'application f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie par :

$$f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$
b) Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{E}$
c) Déterminer les valeurs propres de f et les sous espaces propres associés.
d) f est-elle diagonalisable ? (Si oui, on donnera une base de vecteurs propres)

Correction

Exercice 1

1) On a : $\forall\ (P(X), Q(X), \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$:

$$f\big(P(X) + \alpha\, Q(X)\big)$$

$$= \int_0^1 \big(P(t) + \alpha\, Q(t)\big)dt + \left(\int_0^1 t\,\big(P(t) + \alpha\, Q(t)\big)'dt\right) X + \left(\int_0^1 t^2\,\big(P(t) + \alpha\, Q(t)\big)''dt\right) X^2$$

$$= \int_0^1 P(t)\,dt + \left(\int_0^1 t\,P'(t)\,dt\right) X + \left(\int_0^1 t^2\,P''(t)\,dt\right) X^2$$

$$+ \alpha\ \left(\int_0^1 Q(t)dt + \left(\int_0^1 t\,Q'(t)\,dt\right) X + \left(\int_0^1 t^2\,Q''(t)\,dt\right)\right)$$

$$= \ f\big(P(X)\big) + \alpha\, f\big(Q(X)\big)$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$

2) Soit $P(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2$ alors :

$$P'(X) = a_1 + 2\,a_2\,X$$

$$P''(X) = 2\,a_2$$

Et :

$$\int_0^1 P(t)dt = \left[a_0 + \frac{a_1}{2}\,t^2 + \frac{a_2}{3}\,t^3\right]_0^1 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$$

$$\int_0^1 t\,P'(t)dt = \left[\frac{a_1}{2}\,t^2 + \frac{2\,a_2}{3}\,t^3\right]_0^1 = \frac{a_1}{2} + \frac{2\,a_2}{3}$$

$$\int_0^1 t^2\,P''(t)dt = \left[\frac{2\,a_2}{3}\,t^3\right]_0^1 = \frac{2\,a_2}{3}$$

Soit :

$$f\big(P(X)\big) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{2\,a_2}{3}\right)\ X + \frac{2\,a_2}{3}\,X^2$$

Ainsi :

$$P(X) \in N(f) \Leftrightarrow\ f\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_2}{3} = 0 \\ \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{2\,a_2}{3} = 0 \\ \dfrac{2\,a_2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

Donc :

$$N(f) = \{0\}$$

3) Le théorème du rang donne :

$$rg(f) = dim(\mathbb{E}) - dim\big(N(f)\big) = 3 - 0 = 3$$

Une base de $Im(f)$ est alors $\{1, X, X^2\}$ car $Im(f) = \mathbb{E}$

4) On a :

$$f(1) = 1 = 1.1 + 0.X + 0.X^2$$

$$f(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}.1 + \frac{1}{2}.X + 0.X^2$$

$$f(X^2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X + \frac{2}{3}X^2 = \frac{1}{3}.1 + \frac{2}{3}.X + \frac{2}{3}.X^2$$

On en déduit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

5) Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = Det(A - \lambda\, I_3) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3} - \lambda\right) \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\ \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right)$$

f a donc 3 valeurs propres distinctes qui sont :

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2},\ \ \lambda = \frac{2}{3}$$

Déterminons les sous espaces propres :

$$(A - 1\, I_3)\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\, a_1 + \frac{1}{3}\, a_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}\, a_1 + \frac{2}{3}\, a_2 = 0 \\ -\frac{1}{3}\, a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_1 = Vect[1]$$

$$\left(A - \frac{1}{2}\, I_3\right)\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2}\, a_1 + \frac{1}{3}\, a_2 = 0 \\ \frac{2}{3}\, a_2 = 0 \\ \frac{1}{6}\, a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_{\frac{1}{2}} = Vect[1 - X]$$

$$\left(A - \frac{2}{3}\, I_3\right)\, X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} a_0 + \frac{1}{2}\, a_1 + \frac{1}{3}\, a_2 = 0 \\ -\frac{1}{6}\, a_1 + \frac{2}{3}\, a_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -7\, a_2 \\ a_1 = 4\, a_2 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_{\frac{2}{3}} = Vect[-7 + 4\,X + X^2]$$

6) On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

7) On a :

$$A^n = P\, D^n\, P^{-1}$$

Où :

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

Inversons P en résolvant le système :

$$\begin{cases} x + y - 7\,z = x' \\ -y + 4\,z = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + y' - 4\,z' + 7\,z' \\ y = -y' + 4\,z' \\ z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + y' + 3\,z' \\ y = -y' + 4\,z' \\ z = z' \end{cases}$$

D'où :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$P\,D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -7\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$P\,D^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -7\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^n & 4\left(\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) & \left(3+4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 7\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(-4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \\ 0 & 0 & \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) Supposons 0 valeur propre de A. Alors il existe un vecteur colonne X non nul tel que :

$$A\,X = 0\,X$$

Donc :

$$A^{-1}\,(A\,X) = A^{-1}(0\,X)$$

Soit :

$$X = 0$$

Ce qui est absurde

2) Soit λ valeur propre de A alors il existe un vecteur colonne X non nul tel que :

$$A\,X = \lambda\,X$$

Donc :

$$A^{-1}\,(A\,X) = A^{-1}(\lambda\,X)$$

Soit :

$$X = \lambda\,A^{-1}\,X$$

Finalement :

$$A^{-1}\,X = \frac{1}{\lambda}\,X$$

Donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1}.

Réciproquement, si $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} alors d'après ce que l'on vient de prouver ,

$\frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda$ est valeur propre de $(A^{-1})^{-1} = A$

3) On a :

$$\mathbb{E}_{A,\lambda} = \mathbb{E}_{A^{-1},\frac{1}{\lambda}}$$

4) si A est diagonalisable, elle possède une base de vecteurs propres qui sont également vecteurs propres de A^{-1}, donc A^{-1} est diagonalisable

5)

$$A^{-1} = P\, D^{-1}\, P^{-1}$$

Où D^{-1} est la matrice diagonale donc la diagonale est formée des inverses des éléments diagonaux de D

Exercice 3 :

1) On a : $\forall\, x \in]0, +\infty[$:

$$2\,x + 1 = x + (x + 1)$$

Donc la famille $\{x, x + 1, 2\,x + 1\}$ est liée

Pour l'autre famille, partons d'une combinaison linéaire nulle :

$$\forall x \in]0, +\infty[\ :\ a\, Ln(x) + b\, Ln(x + 1) + c\, Ln(2\,x + 1) = 0$$

Dérivons :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2\,x+1} = 0$$

Mettons au même dénominateur :

$$\frac{a\,(x+1)\,(2\,x+1) + b\,x\,(2\,x+1) + c\ \ x\,(x+1)}{x\,(x+1)\,(2\,x+1)} = 0$$

On en déduit :

$$\forall x \in]0, +\infty[\ :\ a\,(x+1)\,(2\,x+1) + b\,x\,(2\,x+1) + c\ \ x\,(x+1) = 0$$

Considérons le polynôme $a\,(X+1)\,(2\,X+1) + b\,X\,(2\,X+1) + c\ \ X\,(X+1)$

Puisqu'il a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: a\,(x+1)\,(2\,x+1) + b\,x\,(2\,x+1) + c\ \ x\,(x+1) = 0$$

Nous pouvons donc prendre des valeurs particulières de x comme $0, -1, -1/2$. On obtient alors :

$$a = b = c = 0$$

Ce qui prouve que la famille est libre

Exercice 4 :

1) On a :

$$\mathbb{V} = \left\{ a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

Donc $\mathbb{V}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

2) Vérifions que la famille qui engendre $\mathbb{V}$ est bien libre :

$$a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0$$

Donc cette famille est libre. C'est une base de $\mathbb{V}$ qui est ainsi de dimension 2.

3)

a) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) = f\begin{pmatrix} a+k\,a' & b+k\,b' \\ c+k\,c' & d+k\,d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d+k\,d' & -b-k\,b' \\ -c-k\,c' & a+k\,a' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k\,f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$

b) On a :

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) λ est valeur propre de f si il existe une matrice non nulle telle que :

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Qui équivaut à :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a & \lambda\, b \\ \lambda\, c & \lambda\, d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \lambda\, a \\ -b = \lambda\, b \\ -c = \lambda\, c \\ a = \lambda\, d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = \lambda^2\, d \\ (\lambda + 1)\, b = 0 \\ (\lambda + 1)\, c = 0 \\ a = \lambda\, d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda^2 - 1)\, d = 0 \\ (\lambda + 1)\, b = 0 \\ (\lambda + 1)\, c = 0 \\ a = \lambda\, d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = d \end{cases} ou \begin{cases} \lambda = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ a = -d \end{cases} ou \begin{cases} d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

f admet donc 2 valeurs propres 1 et -1 et les sous espaces propres associés sont :

$$\mathbb{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} :\ d \in \mathbb{R} \right\} = Vect \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\mathbb{E}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} : (c, d) \in \mathbb{R}^2 \right\} = Vect \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

d) Il apparait ainsi que $\mathbb{E}_1$ est de dimension 1 et $\mathbb{E}_{-1}$ de dimension 3 car ce dernier est engendré par une famille libre à 3 éléments. On peut donc former une base de vecteurs propres avec les bases de $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_{-1}$ donc f est diagonalisable.