Second devoir surveillé de Mathématiques AI2

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 : Endomorphisme de matrices (6 points)

On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel formé par les matrices carrées d'ordre 2 c'est-à-dire les matrices de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On définira la base canonique de $\mathbb{E}$ par le système formé des 4 matrices :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On considère l'application suivante

$$f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

$$A \to f(A) = A\,B - B\,A$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$
2) Déterminer $f(I_2)$ et en déduire si f est injective ou non ?
3) Déterminer le noyau de f et en donner une base
4) Déterminer l'image de f
5) Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{E}$

Exercice 2 : (6 points)

On désigne par $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

$$P(X) \to P(X+1) - P(X-1)$$

1) Vérifier que l'application a bien un sens, c'est-à-dire que $f\big(P(X)\big) \in \mathbb{E}$ et montrer que f est linéaire
2) Déterminer le noyau de f en en précisant une base
3) En déduire la dimension de l'image de f et une base de cette dernière
4) Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{E}$
5) En déduire les valeurs propres de f ainsi que les vecteurs propres associés

6) f est elle diagonalisable, c'est-à-dire peut on former une base de vecteurs propres ? Justifier

Exercice 3 : matrice inverse (3 points)

Soit la matrice carrée suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Calculer son déterminant et en déduire qu'elle est inversible
2) Déterminer sa matrice inverse

Exercice 4 : Puissances successives d'une matrice (5 points)

1) Préliminaire : On rappelle la formule du binôme de Newton pour les matrices carrées :

   Etant données deux matrices carrées A et B de même ordre n qui commutent

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k \, B^{n-k}$$

   Donner pour de telles matrices les développement de $(A+B)^2, (A+B)^3, (A+B)^7$

2) Application : Soit A une matrice carrée d'ordre 3 de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   a) Mettre A sous la forme : $A = a\, I_3 + B$ où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3 et B une matrice que l'on explicitera.
   b) Montrer que B est nilpotente en calculant les puissances successives de B.
   c) En déduire pour tout entier naturel n les termes de la matrice A^n

Correction :

Exercice 1 :

1) Soit $(A, A', k) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$f(A + A') = (A + A')\,B - B\,(A + A') = A\,B - B\,A + A'B - B\,A' = f(A) + f(A')$$

$$f(k\,A) = (k\,A)\,B - B\,(k\,A) = k\,(AB - B\,A) = k\,f(A)$$

donc f est une application linéaire

2) On a, en désignant la matrice nulle par 0_2 :

$$f(I_2) = A\,I_2 - I_2\,A = 0_2 = f(0_2)$$

Donc f n'est pas injective donc n'est pas bijective.

3) Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

et explicitons $f(A)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 3\,b & 2\,a + 4\,b \\ c + 3\,d & 2\,c + 4\,d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2\,c & b + 2\,d \\ 3\,a + 4\,c & 3\,b + 4\,d \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 3\,b - 2\,c & 2\,a + 3\,b - 2\,d \\ 3\,d - 3\,a - 3\,c & 2\,c - 3\,b \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A \in Ker(f) \iff f(A) = 0$$

$$\iff f(A) = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3\,b - 2\,c & 2\,a + 3\,b - 2\,d \\ 3\,d - 3\,a - 3\,c & 2\,c - 3\,b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 3\,b - 2\,c = 0 \\ 2\,a + 3\,b - 2\,d = 0 \\ 3\,d - 3\,a - 3\,c = 0 \\ 2\,c - 3\,b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\,b = 2\,c \\ 2\,a + 2\,c = 2\,d \\ a + c = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = \dfrac{2}{3}\,c \\ a = d - c \end{cases}$$

Donc :

$$Ker(f)=\left\{\begin{pmatrix} d-c & \frac{2}{3}c \\ c & d\end{pmatrix}, b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{c}{3}\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}, (c,d)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$$=Vect\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right]$$

une base du noyau est le couple de matrices (car il est libre) :

$$\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right]$$

4) Le théorème du rang donne :

$$dim\big(Im(f)\big)=dim(\mathbb{E})-dim\big(Ker(f)\big)=4-2=2$$

et on a :

$$Im(f)=Vect[f(E_{11}),f(E_{12}),f(E_{21}),f(E_{22})]$$

Voyons si les deux premiers vecteurs sont libres :

$$f(E_{11})=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}=2\,E_{12}-3\,E_{21}$$

$$f(E_{12})=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}=3\,E_{11}+3\,E_{12}-3\,E_{22}$$

Ils le sont donc :

$$Im(f)=Vect\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]$$

et une base de l'image est le couple de matrices :

$$\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}\right]$$

5) On a :

$$f(E_{21})=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=-2\,E_{11}-3\,E_{21}+2\,E_{22}$$

$$f(E_{22})=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix}=-2\,E_{12}+3\,E_{21}$$

La matrice de f dans la base canonique s'en déduit :

$$\mathcal{M}_{(E_{ij})}(f)=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -2\\ -3 & 0 & -3 & 3\\ 0 & -3 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) Le degré de $P(X+1)$ et de $P(X-1)$ est le même que celui de $P(X)$ donc celui de $P(X+1)-P(X-1)$ est inférieur ou égal à celui de $P(X)$

Soit $(P(X), Q(X), k) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$f\big(P(X)+k\,Q(X)\big) = P(X+1)+k\,Q(X+1)-\big(P(X-1)+k\,Q(X-1)\big)$$

$$= P(X+1)-P(X-1)+k\,\big(Q(X+1)-Q(X-1)\big)$$

$$= f\big(P(X)\big)+k\,f\big(Q(X)\big)$$

donc f est linéaire

2) Posons : $P(X) = a_0 + a_1\,X + a_2\,X^2$ alors :

$$P(X) \in Ker(f) \Leftrightarrow f\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(X+1)-P(X-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 + a_1\,(X+1) + a_2\,(X+1)^2 - (a_0 + a_1\,(X-1) + a_2\,(X-1)^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\,a_1 + 2\,a_2\,X = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Donc :

$$Ker(f) = Vect[1]$$

3) Le théorème du rang donne :

$$dim\big(Im(f)\big) = dim(\mathbb{E}) - dim\big(Ker(f)\big) = 3-1 = 2$$

et on a :

$$Im(f) = Vect[f(1), f(X), f(X^2)]$$

Or :

$$f(1) = 1-1 = 0$$
$$f(X) = (X+1)-(X-1) = 2$$
$$f(X^2) = (X+1)^2-(X-1)^2 = 4\,X$$

Donc :

$$Im(f) = Vect[1, X]$$

Une base de $Im(f)$ est le couple $(1, X)$

4) On a :

$$\mathcal{M}_{(1,X,X^2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) Les valeurs propres sont les réels λ pour lesquels le système suivant en x, y, z possède une solution non triviale :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ est une valeur propre car le noyau n'est pas réduit au vecteur nul.
Pour les autres valeurs propres le système équivaut au suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda\, x + 2\, y = 0 \\ -\lambda\, y + 4\, z = 0 \\ -\lambda\, z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\, x = 2\, y \\ \lambda\, y = 4\, z \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

L'endomorphisme ne possède donc qu'une seule valeur propre, 0.

6) f n'est pas diagonalisable car elle ne possède qu'un seul sous espace propre dont la dimension est strictement inférieure à celle de $\mathbb{E}$.

Exercice 3

1) On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0$$

Le déterminant étant non nul, la matrice est inversible

2) Pour déterminer la matrice inverse, on résout le système par la méthode de Gauss:

$$\begin{cases} x + z = x' \\ y - z = y' \\ x + y + 2\, z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + \quad z \quad = x' \\ \quad y - z \quad = y' \\ x + y + 2\, z \quad = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + \quad z \quad = x' \\ \quad y - z \quad = y' \\ -y - z \quad = x' - z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \quad + \; z \quad = x' \\ \quad y - \; z \quad = y' \\ \quad\quad -2\,z \quad = x' + y' - z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}x' + \frac{1}{2}\,y' - \frac{1}{2}z' \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{2}z \\ z \;\; = -\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{2}z' \end{cases}$$

La matrice inverse est donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$A^{-1}\,A = I_3$$

<u>Exercice 4</u>

1) On a :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3\,A^2B + 3\,A\,B^2 + B^3$$

$$(A+B)^7 = A^7 + 7\,A^6B + 21\,A^5\,B^2 + 35\,A^4\,B^3 + 35\,A^3\,B^4 + 21\,A^2\,B^5 + 7\,A\,B^6 + B^7$$

2)

a)

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a\,I_3 + B$$

en posant :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On a :

$$A^1 = A$$

et pour $n \geq 2$:

$$A^n = (a\,I_3 + B\,)^n = (a\,I_3)^n + n\,(a\,I_3)^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}\,(a\,I_3)^{n-2}B^2$$

$$= a^n\,I_3 + n\,a^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}B^2$$

$$= a^n\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + n\,a^{n-1}\begin{pmatrix}0 & b & c\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}\begin{pmatrix}0 & 0 & b^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a^n & n\,a^{n-1}\,b & n\,a^{n-1}\,c + \frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}\,b^2\\ 0 & a^n & n\,a^{n-1}\,b\\ 0 & 0 & a^n\end{pmatrix}$$