Second devoir surveillé de Mathématiques A12

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 : Forme linéaire (4 points)

On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel formé par les matrices carrées d'ordre 2. On considère l'application suivante appelée trace :

$$T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow T(A) = a + d$$

- 1) Montrer que T est une application linéaire (1 point)
- 2) Déterminer une équation du noyau de T et en donner une base (1 point)
- 3) Déterminer l'image de T (1point)
- 4) Montrer que T vérifie la propriété (1 point) :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{E}^2 : T(A B) = T(BA)$$

Exercice 2 : (6 points)

On désigne par $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel formé par les polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application suivante :

$$f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$$

$$P(X) \rightarrow P'(X^2 + 1)$$

Où $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$

- 1) Vérifier que l'application a bien un sens, c'est-à-dire que $P'(X^2 + 1) \in \mathbb{E}$ et montrer que f est linéaire (1 point)
- 2) Déterminer le noyau de f en en précisant une base (1 point) :
- 3) En déduire la dimension de l'image de f (0,5 point)
- 4) Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{E}$ (1,5 point)
- 5) En déduire les valeurs propres de f ainsi que les vecteurs propres associés (1,5 point)
- 6) f est elle diagonalisable, c'est-à-dire peut on former une base de vecteurs propres ? Justifier (0,5 point)

Exercice 3 : Théorème de Cayley Hamilton à l'ordre 2 (3 points)

On désigne par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel formé par les matrices carrées d'ordre 2. En posant :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le polynôme caractéristique de A à savoir : (1 point)

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} (a - X) & c \\ b & (d - X) \end{vmatrix}$$

2) Vérifier le théorème de Cayley Hamilton, à savoir (2 points) :

$$P_A(A) = 0$$

On rappelle que si $P(X) = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ alors :

$$P(A) = a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_2$$

où :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : matrice inverse et valeur propre (2 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n inversible. Montrer que si λ est valeur propre de A alors son inverse $1/\lambda$ est valeur propre de A^{-1}

Exercice 5 : matrice inverse (3 points)

Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant :

$$A^3 = 3A + I_n$$

Où I_n désigne la matrice identité d'ordre n

Montrer que A est inversible et exprimer A^{10} et A^{-1} en fonction de puissances de A et de I_n

Exercice 6 : Déterminant (2 points)

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

A est elle inversible ?

Correction

1)

Soit $(A, B, k) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$. Posons :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A + B = \begin{pmatrix} a + a' & c + c' \\ b + b' & d + d' \end{pmatrix}$$

$$kA = \begin{pmatrix} k a & k c \\ k b & k d \end{pmatrix}$$

Donc :

$$T(A + B) = (a + a') + (d + d') = (a + d) + (a' + d') = T(A) + T(B)$$

$$T(kA) = k a + k b = k (a + b) = k T(A)$$

Donc T est linéaire.

2)

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A \in N(T) \Leftrightarrow T(A) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$$

Donc :

$$\begin{aligned} N(T) &= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Considérons la base canonique de $\mathbb{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices génératrices du noyau ont pour vecteurs colonnes respectifs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces trois vecteurs colonnes sont de façon triviale libres, donc :

$$\dim(N(T)) = 3$$

3) D'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(N(T)) = 4 - 3 = 1$$

Or $\text{Im}(T)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1 donc :

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}$$

4)

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A B = \begin{pmatrix} a a' + c b' & a c' + c d' \\ b a' + d b' & b c' + d d' \end{pmatrix}$$

Donc :

$$T(A B) = a a' + c b' + b c' + d d'$$

En échangeant les primes, on en déduit :

$$T(B A) = a' a + c' b + b' c + d' d$$

Il apparaît :

$$T(A B) = T(B A)$$

Exercice 2 :

1) Posons

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

alors

$$P'(X) = a_1 + 2 a_2 X$$

$$P'(X^2 + 1) = a_1 + 2 a_2 (X^2 + 1) = a_1 + 2 a_2 + 2 a_2 X^2$$

Donc $P'(X^2 + 1) \in \mathbb{E}$

2)

Soit :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

Alors :

$$P(X) \in N(f) \Leftrightarrow f(P(X)) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 2 a_2 + 2 a_2 X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2 a_2 = 0 \\ 2 a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Donc :

$$N(f) = \text{Vect}[1]$$

$$\dim(N(f)) = 1$$

3)

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(N(T)) = 3 - 1 = 2$$

4)

$$f(1) = 0 = 0 \times 1 + 0 X + 0 X^2$$

$$f(X) = 1 = 1 \times 1 + 0 X + 0 X^2$$

$$f(X^2) = 2(X^2 + 1) = 2 + 0 X + 2 X^2$$

On en déduit la matrice de f relativement à la base canonique $1, X, X^2$ de $\mathbb{E}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 2 \\ 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (-X)(-X)(2-X) = X^2(2-X)$$

f a donc deux valeurs propres, 0 et 2

Les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 forment le sous espace propre :

$$\mathbb{E}_0 = N(f)$$

Déterminons le sous espace propre $\mathbb{E}_2$ des vecteurs propres associés à la valeur propre 2 en résolvant :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 a_0 + a_1 + 2 a_2 = 0 \\ -2 a_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_2 = \{P(X) = a_0 (1 + X^2) : a_0 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}[1 + X^2]$$

$$\dim(\mathbb{E}_2) = 1$$

6) f n'est pas diagonalisable car : $\dim(\mathbb{E}_0) + \dim(\mathbb{E}_2) < \dim(\mathbb{E})$

Exercice 3

1)

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & c \\ b & d - X \end{vmatrix} = (a - X)(d - X) - b c = X^2 - (a + d)X + a d - b c$$

2)

$$P_A(A) = A^2 - (a + d)A + a d - b c$$

Or si on pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b c & a c + c d \\ b a + d b & a d + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a + d)A = \begin{pmatrix} a^2 + a d & a c + c d \\ a b + b d & a d + d^2 \end{pmatrix}$$

$$(a d - b c) I_2 = \begin{pmatrix} a d - b c & 0 \\ 0 & a d - b c \end{pmatrix}$$

On vérifie alors aisément que :

$$P_A(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

Soit λ valeur propre de A alors il existe $X \neq 0$ tel que :

$$A X = \lambda X$$

Donc :

$$A^{-1}(A X) = A^{-1}(\lambda X)$$

$$X = \lambda A^{-1} X$$

Donc

$$\lambda \neq 0$$

$$A^{-1} X = \frac{1}{\lambda} X$$

Donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de A^{-1} et X est un vecteur propre non nul associé.

Exercice 5 :

$$A^3 = 3 A + I_n$$

$$A^3 - 3 A = I_n$$

$$A (A^2 - 3 I_n) = I_n$$

Donc A inversible et :

$$A^{-1} = A^2 - 3 I_n$$

$$\begin{aligned} A^{10} &= A(A^3)^3 = A(3 A + I_n)^3 \\ &= A((3 A)^3 + 3(3 A)^2 I_n + 3(3 A) I_n^2 + I_n^3) \\ &= A(9 A^3 + 27 A^2 + 9 A + I_n) \\ &= A(9(3 A + I_n) + 27 A^2 + 9 A + I_n) \\ &= A(27 A^2 + 36 A + 10 I_n) \\ &= 27 A^3 + 36 A^2 + 10 A \\ &= 27(3 A + I_n) + 36 A^2 + 10 A \\ &= 36 A^2 + 91 A + 27 I_n \end{aligned}$$

Exercice 6 :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \left(3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \times 20 - (-18 - 4) = 62 \end{aligned}$$