Contrôle de Mathématiques AI2 –Décembre 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Espaces vectoriels généraux (3,5 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

Soit $\mathbb{F} = \{\vec{u} = (x, y, z),\ x + y - 2\,z = 0)\}$ et $\mathbb{G} = Vect(\vec{e})$ où $\vec{e} = (1,2,3)$

a) Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de .
b) Déterminer une base de $\mathbb{F}$ et en déduire sa dimension
c) Déterminer des équations paramétriques de $\mathbb{G}$ et en déduire $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$
d) A-t-on $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$?

Exercice 2 : Espace vectoriel de fonctions (3,5 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{E}$ formé par les applications deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

a) Soit l'application Φ de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{F}$ définie par : $\Phi(f) = f'' + f^2$

Montrer, par un exemple simple, qu'il existe un réel α et une fonction f de $\mathbb{F}$ telle que $\Phi(\alpha\, f) \neq \alpha\, f$. En déduire que Φ n'est pas linéaire.

b) Soit l'application Ψ de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ définie par : $\Psi(f) = f'' - f$

Montrer que Ψ est linéaire

Déterminer son noyau, ainsi qu'une base du noyau

Exercice 3 : Espace vectoriel de polynômes (8 points)

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes de degré 2 à coefficients réels, à savoir :

$$\mathbb{R}_2[X] = \{c + b\,X + a\,X^2\,, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On rappelle que les vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ sont des suites et que 1 est la notation simplifiée de la suite (1,0,0,…), X celle de (0,1,0,…) et X^2 celle de (0,0,1,…) et que la famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ appelée base canonique.

On rappelle également la définition de la composée de deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$:

En notant : $P(X) = c + b\,X + a\,X^2$ alors : $P(Q(X)) = c + b\,Q(X) + a\,Q(X)^2$

Soit la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ où :

$$\overrightarrow{e_1} = X(X-1)\ ;\ \ \overrightarrow{e_2} = X(X+1)\ ;\ \overrightarrow{e_3} = (X-1)(X+1)$$

a) Montrer que cette famille est libre, en déduire que c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
b) Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à cette base
c) Inverser P

Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par : $\Phi\big(P(X)\big) = 2\,P(X+1) - X\,P'(X)$

On rappelle la définition du polynôme dérivé :

En notant $P(X) = c + b\,X + a\,X^2$ alors $P'(X) = b + 2\,a\,X$

d) Déterminer le noyau de Φ en précisant une base.
e) Déterminer la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire une base de l'image de Φ
f) En déduire la matrice B de Φ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$

Exercice 4 : Inversion de matrice (5 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3. On suppose qu'une matrice A de $\mathbb{E}$ vérifie :

$$A^3 - 5\,A^2 + 2\,A + 4\,I_3 = 0$$

a) Déterminer l'inverse de A en fonction de puissances de A et de I
b) Déterminer A^4 en fonction de puissances de A et de I
c) Si C et D sont deux matrices inversibles, montrer que : $(C\,D)^{-1} = D^{-1}\,C^{-1}$

On suppose que C et D sont des matrices telles que $C = P\,D\,P^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Soit n un entier naturel non nul. Montrer par récurrence sur n que : $C^n = P\,D^n\,P^{-1}$
e) En déduire les termes de la matrice C^n

Exercice 1

a)

$\mathbb{F} = \{\vec{u} = (x, y, z),\ x + y - 2\,z = 0)\}$

Soient $\vec{u} = (x, y, z), \vec{v} = (x', y', z')$ deux vecteurs de $\mathbb{F}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

alors :

$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y', z + z')$

$\alpha\,\vec{u} = (\alpha\,x, \alpha\,y, \alpha\,z)$

$x + y - 2\,z = 0$

$x' + y' - 2\,z' = 0$

Par somme :

$(x + x') + (y + y') - 2\,(z + z') = 0$

donc $\vec{u} + \vec{v}\ \in \mathbb{F}$

Par produit de la première par α

$\alpha\,x + \alpha\,y - 2\,\alpha\,z = 0$

donc $\alpha\,\vec{u}\ \in \mathbb{F}$

$\mathbb{F}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

b)

En exprimant x en fonction de y et z on a :

$\mathbb{F} = \{\vec{u} = (-y + 2\,z, y, z) : (y; z) \in \mathbb{R}^2\} = \{\vec{u} = y\,(-1,1,0) + z\,(2,0,1) : (y; z) \in \mathbb{R}^2\}$

Donc

$\mathbb{F} = Vect\left(\overrightarrow{e_1} = (-1,1,0);\ \overrightarrow{e_2} = (2,0,1)\right)$

Or $(\overrightarrow{e_1};\ \overrightarrow{e_2})$ est de façon évidente une partie libre donc une base de $\mathbb{F}$

D'où $\dim(\mathbb{F}) = 2$

c)

$\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{G} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} :\ \vec{u} = k\,\vec{e}$

$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = 3\,k \end{cases}$

$\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = 3\,k \end{cases} \ \ et\ \ x + y - 2\,z = 0$

$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = k \\ y = 2\,k \\ z = 3\,k \end{cases} \ \ et\ \ k + 2\,k - 6\,k = 0$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$

Donc :

$\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \{\vec{0}\}$

d)

La somme $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ est directe donc :

$\dim(\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}) = \dim(\mathbb{F}) + \dim(\mathbb{G}) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{E})$

et $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$, donc :

$\mathbb{F} \oplus \mathbb{G} = \mathbb{E}$

<u>Exercice 2</u>

a)

$\Phi(f) = f'' + f^2$

Prenons pour f la fonction constante égale à 1 et $\alpha = 2$

$$\Phi(2\,f) = \Phi(2) = 0 + 2^2 = 4$$

$$2\,\Phi(\,f) = 2\,\Phi(1) = 2\,(0+1^2) = 2$$

Donc $\Phi(2\,f) \neq 2\,\Phi(\,f)$

Φ n'est donc pas linéaire.

b)

$\Psi(f) = f'' - f$

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

$\Psi(f+g) = (f+g)'' - (f+g) = (f'' - f) + (g'' - g) = \Psi(f) + \Psi(g)$

$\Psi(\alpha\, f) = (\alpha\, f)'' - (\alpha\, f) = \alpha(f'' - f) = \alpha\, \Psi(f)$

Donc Ψ est linéaire

$f \in N(\Psi) \Leftrightarrow \Psi(f) = 0$

$\Leftrightarrow f'' - f = 0$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est :

$r^2 - 1 = 0$

dont les racines sont -1 et 1

Les solutions sont donc les fonctions définies pour tout réel x par :

$f(x) = A\,e^{-x} + B\,e^{x}$

A et B étant deux réels arbitraires

Donc :

$N(\Psi) = Vect(e^{-x}\,;\,e^{x})$

$(e^{-x}\,;\,e^{x})$ étant une partie libre, elle forme une base du noyau, qui est donc de dimension 2

Exercice 3

$\overrightarrow{e_1} = X(X-1)$; $\overrightarrow{e_2} = X(X+1)$; $\overrightarrow{e_3} = (X-1)(X+1)$

a)

Partons d'une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha\,\overrightarrow{e_1} + \beta\,\overrightarrow{e_2} + \gamma\,\overrightarrow{e_3} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\,X(X-1) + \beta\,X(X+1) + \gamma\,(X-1)(X+1) = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\,X^2 + (-\alpha+\beta)\,X - \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -\alpha+\beta = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Donc la partie ($\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{e_3}$) est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$ qui est par ailleurs de dimension 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$

b)

Matrice de passage de la base ($1;\ X;\ X^2$) à la base ($\overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2}$; $\overrightarrow{e_3}$)

$$\overrightarrow{e_1} = X(X-1) = 0 - X + X^2$$

$$\overrightarrow{e_2} = X(X+1) = 0 + X + X^2$$

$$\overrightarrow{e_3} = (X-1)(X+1) = -1 + 0\,X + X^2$$

D'où :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Inverse de P

On résout le système associé :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -z = x' \\ -x + y = y' \\ x + y + z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x' \\ -x + y = y' \\ x + y = x' + z' \end{cases}$$

(par ajout, puis soustraction des deux dernières)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x' \\ 2\,y = x' + y' + z' \\ 2\,x = x' - y' + z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{2}\,z' \\ y = \frac{1}{2}\,x' + \frac{1}{2}\,y' + \frac{1}{2}\,z' \\ z = -x' + 0\,y' + 0\,z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Soit :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$P^{-1}\,P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

d)

Soit $P(X) = c + b\,X + a\,X^2$

$$P(X) \in N(\Phi) \Leftrightarrow \Phi\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi\big(P(X)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\,P(X+1) - X\,P'(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\,(c + b\,(X+1) + a\,(X+1)^2) - X\,(b + 2\,a\,X) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\,(a + b + c + (b + 2\,a)\,X + a\,X^2) - b\,X - 2\,a\,X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ 2\,(a+b+c) + (4\,a+b)\,X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,(a+b+c) = 0 \\ 4\,a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3\,a \\ b = -\,4\,a \end{cases}$$

Donc :

$N(\Phi) = \{P(X) = a\,(3 - 4\,X + \ X^2) : a \in \mathbb{R}\} = Vect(3 - 4\,X + \ X^2)$

Le polynôme $3 - 4\,X + \ X^2$ est une base de $N(\Phi)$ qui est donc de dimension 1

e)

$\Phi(1) = 2 \times 1 - X\,.\,0 = 2 + 0\,X + 0\,X^2$

$\Phi(X) = 2\,(X+1) - X\,.\,1 = 2 + X + 0\,X^2$

$\Phi(X^2) = 2\,(X+1)^2 - X\,.\,2\,X = 2\,X^2 + 4\,X + 2 - 2\,X^2 = 2 + 4\,X + 0\,X^2$

D’où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le théorème du rang indique que :

$$Dim\big(Im(\Phi)\big) + Dim\big(N(\Phi)\big) = Dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$$

Donc :

$$Dim\big(Im(\Phi)\big) = 2$$

Or les colonnes de A donnent une partie génératrice de $Im(\Phi)$

$Im(\Phi) = Vect(2\,;\ 2 + X\,; 2 + 4\,X)$

Dans cette partie, les deux premiers vecteurs ne sont, de façon évidente, pas liés. Ainsi :

$(2\,;\ 2 + X)$ est une base de $Im(\Phi)$

Notons qu'on pourrait tout aussi bien prendre $(1\ ;\ 2+X)$ puisqu'on ne change pas le caractère de base d'une partie en multipliant chacun de ses vecteurs par des constantes quelconques non nulles

f)

$$B = P^{-1}A\ \ P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 3 & 9 & 4 \\ 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 4</u>

$$A^3 - 5\,A^2 + 2\,A + 4\,I_3 = 0$$

a)

$$(A^2 - 5\,A + 2\,I_3)\,A = -4\,I_3$$

$$-\frac{1}{4}(A^2 - 5\,A + 2\,I_3)\,A = I_3$$

Donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - 5\,A + 2\,I_3)$$

b)

$$A^3 = 5\,A^2 - 2\,A - 4\,I_3$$

$$A^4 = 5\,A^3 - 2\,A^2 - 4\,A = 5\,(5\,A^2 - 2\,A - 4\,I_3) - 2\,A^2 - 4\,A = 23\,A^2 - 14\,A - 20\,I_3$$

c)

Par associativité du produit matriciel :

$$(C\ D)(D^{-1}C^{-1}) = C\ (D\ D^{-1})\ C^{-1}$$

puis propriété de l'inverse :

$$(C\ D)(D^{-1}C^{-1}) = C\ (I_3)\ C^{-1}$$

puis la matrice identité :

$$(C\ D)(D^{-1}C^{-1}) = C\ \ C^{-1}$$

et à nouveau de l'inverse :

$$(C\ D)(D^{-1}C^{-1}) = I_3$$

On en déduit :

$$(C\ D)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$$

d)

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$

$$C = P\ D\ P^{-1}$$

La propriété est vraie par hypothèse.

<u>Hérédité</u> :

Soit n un entier naturel pour lequel la propriété est vraie, alors :

$$C^n = P\ D^n\ P^{-1}$$

Donc :

$$C^{n+1} = CC^n = (P\ D\ P^{-1})(P\ D^n\ P^{-1}) = P\ D\ (P^{-1}\ P\ )D^n\ P^{-1} = P\ D\ D^n\ P^{-1} = P\ D^{n+1}\ P^{-1}$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$

Elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$

e)

$$C^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2^n & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$C^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & -2+2^{n+1} & 0 \\ 1-2^n & -1+2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$