Devoir surveillé 2 : AI1 – 2021

Mathématiques (L.Gry)

Exercice 1 : Développement de Taylor-Young (4 pts)

On considère la fonction $f(x) = ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

1) Exprimer $ch(a+b)$ en fonction de $ch(a)$ et $ch(b)$. On explicitera la démarche et on pourra partir des développement de $ch(a)ch(b)$ et $sh(a)sh(b)$.
2) En posant $x = 1 + h$, en déduire $ch(1+h)$ en fonction de $ch(h)$ et $sh(h)$.
3) En déduire, le développement limité de Taylor Young de $f(x)$ en 1 à l'ordre 4.

Exercice 2 : Calcul de limites (7 pts)

En utilisant si besoin les développements limités et les équivalents, calculer :

$a)\quad \lim_{x\to 0^+} (1+sin(x))^{\frac{1}{x}} \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x+x} \qquad c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{2\,ch(x) - 2 - 3\,x^2}{cos(x) - 1}$

$d)\quad \lim_{x\to+\infty} Ln(x)^{\frac{1}{Ln(x)}} \qquad e)\quad \lim_{x\to 0^+} |Ln(x)|^{\frac{1}{Ln(x)}}$

On rappelle que pour tout réel $a > 0 : a = e^{Ln(a)}$

Exercice 3 : Equivalents (3 pts)

Soit un réel a et f une fonction bornée sur un intervalle I contenant a. Soit f une fonction définie sur I et telle que :

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

1) Montrer qu'au point a, on a :

$$f(x) + g(x) \sim g(x)$$

2) Application : Donner un équivalent simple, au voisinage de $+\infty$, de la fonction :

$$h(x) = \sqrt[3]{e^{3\,x} + 2020\,cos(5\,x) - 2021}$$

Exercice 4 : Développements limités de Taylor-Mac Laurin (6 pts)

1) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction suivante :

$$f(x) = (1+e^x)\,(ch(x) - 3)$$

2) Soit f une fonction réelle de la variable réelle admettant un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la forme :

$$f(x) = 2 + x + 5\,x^2 - x^3 + o(x^3)$$

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de son inverse $g = 1/f$

Sans calculs, donner la valeur de $g'(0)$

3) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction :

$$f(x) = ch(sin(x))$$

Conseil : On fera d'abord le développement à l'ordre 3 de $sin(x)$ en 0 puis celui de $ch(t)$ au même ordre en 0 et on remplacera dans ce dernier t par le développement de $sin(x)$

4) Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction

$$f(x) = Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Correction

Exercice 1 :

1) On a :

$$ch(a)ch(b) = \frac{(e^a + e^{-a})}{2} \frac{\left(e^b + e^{-b}\right)}{2} = \frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-(a+b)}}{4}$$

$$sh(a)sh(b) = \frac{(e^a - e^{-a})}{2} \frac{\left(e^b - e^{-b}\right)}{2} = \frac{e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-(a+b)}}{4}$$

Donc :

$$ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = ch(a+b)$$

2)

$$ch(1+h) = ch(1)ch(h) + sh(1)sh(h)$$

3)

$$ch(1+h) = ch(1)\left(1 + \frac{1}{2}\, h^2 + \frac{1}{24}\, h^4 + o(h^4)\right) + sh(1)\left(h - \frac{1}{6}\, h^3 + o(h^4)\right)$$

$$= ch(1) + sh(1)\, h + \frac{ch(1)}{2}\, h^2 - \frac{sh(1)}{6}\, h^3 + \frac{ch(1)}{24}\, h^4 + o(h^4)$$

Exercice 2 :

a)

$$\left(1 + sin(x)\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} Ln\left(1+sin(x)\right)}$$

Et en 0 :

$$sin(x) \sim x$$

$$Ln\left(1 + sin(x)\right) \sim sin(x) \sim x$$

$$\frac{1}{x}\, Ln\left(1 + sin(x)\right) \sim 1$$

Donc

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + sin(x)\right)^{\frac{1}{x}} = e$$

b) On a affaire à une forme indéterminée. On transforme en :

$$\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x + x} = \frac{(e^x + 1) - (e^x + x)}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x + x}} = \frac{-x}{\sqrt{e^x + 1} + \sqrt{e^x + x}} \sim \frac{-x}{2\sqrt{e^x}} = -\frac{x}{2}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x+x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} = \lim_{t\to+\infty} -t\, e^{-t} = 0$$

c) On procède à des développements limités :

$$\frac{2\, ch(x)-2-3\,x^2}{cos(x)-1} = \frac{2\left(1+\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)\right)-2-3\,x^2}{\left(1-\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)\right)-1} = \frac{-2\,x^2+o(x^2)}{-\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)} \sim \frac{-2\,x^2}{-\frac{1}{2}\,x^2} = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\, ch(x)-2-3\,x^2}{cos(x)-1} = 4$$

d) On met en forme exponentielle :

$$Ln(x)^{\frac{1}{Ln(x)}} = e^{\frac{1}{Ln(x)}Ln(Ln(x))}$$

et on note que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{Ln(x)} Ln(Ln(x)) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} Ln(t) = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} Ln(x)^{\frac{1}{Ln(x)}} = 1$$

e) Comme précédemment :

$$|Ln(x)|^{\frac{1}{Ln(x)}} = e^{\frac{1}{Ln(x)}Ln(|Ln(x)|)}$$

Et on note, en posant : $t = |Ln(x)|$, soit $Ln(x) = -t$ sur $]0,1[$ que :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{Ln(x)} Ln(|Ln(x)|) = \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t} Ln(t) = 0$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} Ln(x)^{\frac{1}{Ln(x)}} = 1$$

<u>Exercice</u> 3 :

1) Par hypothèse , il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall\, x \in I :\ |f(x)| \leq M$$

Or, sur un voisinage de a, on aura $g > 0$ donc :

$$f(x)+g(x) = g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}+1\right)$$

Et :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \frac{M}{g(x)}$$

Or :

$$\lim_{x \to a} \frac{M}{g(x)} = 0$$

Donc par comparaison :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

D'où

$$f(x) + g(x) \sim g(x)$$

2) Posons :

$$f(x) = 2020\, cos(5\, x) - 2021$$

On a sur $\mathbb{R}$:

$$|f(x)| \leq 2020|cos(5\, x)| + 2021 \leq 2020 + 2021 = 4041$$

Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

De plus :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{3\, x} = +\infty$$

Donc, en $+\infty$:

$$e^{3\, x} + 2020\, cos(5\, x) - 2021 \sim e^{3\, x}$$

D'où :

$$h(x) \sim \sqrt[3]{e^{3\, x}} = e^x$$

<u>Exercice</u> 4 :

1)

$$(1 + e^x)\,(ch(x) - 3)$$

$$1 + e^x \;=\; 2 + \; x + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{24}\, x^4 + o(x^4)$$

$$ch(x) - 3 = -2 \qquad + \frac{1}{2}\, x^2 \qquad + \frac{1}{24}\, x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = -4 - 2\, x + (1 - 1)\, x^2 + \left(-\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right) x^3 + \left(\frac{2}{24} - \frac{2}{24} + \frac{1}{4}\right) x^4 + o(x^4)$$

$$= -4 - 2\, x + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{4}\, x^4 + o(x^4)$$

2) Posons :

$$\frac{1}{f(x)} = \quad a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = 2 \ \ + x + \ \ 5\, x^2 \quad\ - x^3 + o(x^3)$$

Alors :

$$\begin{cases} 2\, a_0 = 1 \\ a_0 + 2\, a_1 = 0 \\ 5\, a_0 + 2\, a_2 + a_1 = 0 \\ -\, a_0 + 2\, a_3 + 5\, a_1 + \ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2} \\ a_1 = -\dfrac{1}{4} \\ a_2 = -\dfrac{9}{8} \\ a_3 = \dfrac{23}{16} \end{cases}$$

D'où :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\, x - \frac{9}{8}\, x^2 + \frac{23}{16}\, x^3 + o(x^3)$$

Et :

$$g'(0) = a_1 = -\frac{1}{4}$$

3) On a en 0 pour les variables x et t :

$$sin(x) = x - \frac{1}{6}\, x^3 + o(x^3)$$

$$ch(t) = 1 + \frac{1}{2}\, t^2 + o(t^3)$$

Donc, par composée :

$$f(x) = ch(sin(x))$$

$$ch(sin(x)) = 1 + \frac{1}{2}\, sin^2(x) + o\big(sin^3(x)\big)$$

Or :

$$o\big(sin^3(x)\big) = o(x^3)$$

$$sin^2(x) = x^2 + o(x^3)$$

D'où :

$$ch(sin(x)) = 1 + \frac{1}{2}\ x^2 + o(x^3)$$

4)

$$f(x) = Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = Ln(1+x) - Ln(1-x)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)\right)$$

$$= 2\,x + + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + o(x^5)$$