Devoir surveillé AI1 – 2020

Mathématiques

Exercice 1 : Développement de Taylor-Young (5 pts)

On considère la fonction $f(x) = Ln(3\,x + \pi) + cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

1) En posant $x = \frac{\pi}{3} + h$, exprimer $Ln(3\,x + \pi)$ en fonction de la nouvelle variable h en le mettant sous la forme :

$$Ln(3\,x + \pi) = a + Ln(1 + u(h))$$

où a est une constante à déterminer de même que $u(h)$ une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0

2) De la même façon, exprimer $cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ en fonction de h en le mettant sous la forme :

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = b\cos(h) + c\,sin(h)$$

où b et c sont deux constantes à déterminer

3) Effectuer le développement limité de $Ln(1 + u(h))$ et de $b\cos(h) + c\,sin(h)$ en 0 à l'ordre 5.
4) En déduire, le développement limité de Taylor Young de $f(x)$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 5

Exercice 2 : Calcul de limites (5 pts)

En utilisant si besoin les développements limités et les équivalents, calculer :

$$a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad b)\ \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad c)\ \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - sin(x)}{x^2} \qquad e)\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x - 1 - sin(x)}{x^2}$$

Exercice 3 : Développements limités de Taylor-Mac Laurin (10 pts)

1) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction suivante :

$$f(x) = (2 + e^x)\,(3\,Ln(1 + x) + 2)$$

2) Soit f une fonction réelle de la variable réelle admettant un développement limité en 0 à l'ordre 3 de la forme :

$$f(x) = 1 - x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + o(x^3)$$

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de son inverse $g = 1/f$

Sans calculs, donner la valeur de $g'(0)$

3) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction :

$$f(x) = e^{sin(x)}$$

4) Donner le développement limité à l'ordre 7 en 0 de la fonction

$$f(x) = th^{-1}(x)$$

5) Soit $\beta \in]0, +\infty[$ et soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]-\beta, \beta[$ et telle que :

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = 1$$

f'' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0

f vérifie sur $]-\beta, \beta[$: $f''(x) = 2\, f'(x) - x\, f(x) + 2\, x^2$

Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 5

Correction

Exercice 1 :

1)

$$f(x) = Ln(3\,x + \pi) = Ln\left(3\,\left(\frac{\pi}{3} + h\right) + \pi\right) Ln(3\,h + 2\,\pi) = Ln(2\,\pi) + Ln\left(1 + \frac{3\,h}{2\,\pi}\right)$$

2)

$$cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = cos(h)\,cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) - sin(h)\,sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}cos(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sin(h)$$

3)

$$Ln(1+t) = t - \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{3}\,t^3 - \frac{1}{4}\,t^4 + \frac{1}{5}\,t^5 + o(\,t^5)$$

$$Ln\left(1 + \frac{3\,h}{2\,\pi}\right) = \frac{3\,h}{2\,\pi} - \frac{1}{2}\left(\frac{3\,h}{2\,\pi}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\,h}{2\,\pi}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{3\,h}{2\,\pi}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{3\,h}{2\,\pi}\right)^5 + o\left(\left(\frac{3\,h}{2\,\pi}\right)^5\right)$$

$$= \frac{3\,h}{4\,\pi} - \frac{9}{8\,\pi^2}\,h^2 + \frac{9}{24\,\pi^3}\,h^3 - \frac{81}{64\,\pi^4}\,h^4 + \frac{243}{160}\,h^5 + o(h^5)$$

$$-\frac{1}{2}cos(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sin(h)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\,h^2 + \frac{1}{24}\,h^4 + o(h^5)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{1}{6}\,h^3 + \frac{1}{120}\,h^5 + o(h^5)\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,h + \frac{1}{4}\,h^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\,h^3 - \frac{1}{48}\,h^4 - \frac{\sqrt{3}}{240}\,h^5 + o(h^5)$$

4)

$$f(x) = Ln(2\,\pi) - \frac{1}{2} + \left(\frac{3\,h}{2\,\pi} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{8\,\pi^2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{9}{24\,\pi^3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$$
$$- \left(\frac{81}{64\,\pi^4} + \frac{1}{48}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \left(\frac{243}{160} - \frac{\sqrt{3}}{240}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5\right)$$

Exercice 2 :

a)

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\,Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

et :

$$x\,Ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x\,Ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x\,Ln(x+1) - x\,Ln(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\,Ln(x+1) = \lim_{x\to 0^+} x\,Ln(x) = 0$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$$

b) en $+\infty$

$$x\,Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim x\,\frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

c)

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = e^{x\,Ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

en $+\infty$

$$x\,Ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim x\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^x = +\infty$$

d) En 0 :

$$\frac{e^x - 1 - sin(x)}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + o(x^2) - 1 - \left(x + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{\frac{1}{2}\,x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - sin(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

e) en $+\infty$

$$-1 - sin(x) = o(e^x)$$

Donc :

$$\frac{e^x - 1 - sin(x)}{x^2} \sim \frac{e^x}{x^2}$$

Et par croissance comparée :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - 1 - sin(x)}{x^2} = +\infty$$

Exercice 3 :

1)

$$2+e^x \qquad = 3 + \quad x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^4)$$

$$3\,Ln(1+x)+2 = 2 + 3\,x - \frac{3}{2}\,x^2 + \ x^3 - \frac{3}{4}\,x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = 6 + (9+2)x + \left(-\frac{9}{2}+1+3\right)\,x^2 + \left(3+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\,x^3 + \left(-\frac{9}{4}+\frac{1}{12}+1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\,x^4 + o(x^4)$$

$$= 6 + 11\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{10}{3}\,x^3 - \frac{17}{12}\,x^4 + o(x^4)$$

2) Posons :

$$\frac{1}{f(x)} = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = 1 - x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + o(x^3)$$

Alors :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ -a_0 + a_1 = 0 \\ 3\,a_0 + a_2 - a_1 = 0 \\ -4\,a_0 + +a_3 + 3\,a_1 - \ a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = -2 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$

D’où :

$$g'(x) = \frac{1}{f(x)} = 1 + \ x - 2\,x^2 - \ x^3 + o(x^3)$$

Et :

$$g'(0) = a_1 = 1$$

3) On a en 0 pour les variables x et t :

$$sin(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3)$$

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{6}\,t^3 + o(t^3)$$

Donc, par composée :

$$e^{sin(x)} = 1 + sin(x) + \frac{1}{2}\, sin^2(x) + \frac{1}{6}\, sin^3(x) + o\big(sin^3(x)\big)$$

Or :

$$o\big(sin^3(x)\big) = o(x^3)$$

$$sin^2(x) = x^2 + o(x^3)$$

$$sin^3(x) = x^3 + o(x^3)$$

D'où :

$$e^{sin(x)} = 1 + x - \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{6}\, x^3 + o(x^3) = 1 + x + \frac{1}{2}\, x^2 + o(x^3)$$

4) On a

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Or en 0 :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3)$$

Donc, par composée :

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + o(x^6)$$

Et par intégration :

$$th^{-1}(x) = th^{-1}(0) + x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + o(x^7)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + o(x^7)$$

5) Posons :

$$f''(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + o(x^3)$$

Alors par intégration :

$$f'(x) = 1 + a_0\, x + \frac{a_1}{2}\, x^2 + \frac{a_2}{3}\, x^3 + \frac{a_3}{4}\, x^4 + o(x^4)$$

Et :

$$f(x) = 2 + x + \frac{a_0}{2}\, x^2 + \frac{a_1}{6}\, x^3 + \frac{a_2}{12}\, x^4 + \frac{a_3}{20}\, x^5 + o(x^5)$$

Introduisons alors ces développements dans l'équation en se limitant à l'ordre 3 et en identifiant leurs parties régulières :

$$f''(x) = 2\, f'(x) - x\, f(x) + 2\, x^2$$

$$a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 = 2 + 2\, a_0\, x + a_1\, x^2 + \frac{2\, a_2}{3}\, x^3 - 2\, x - x^2 - \frac{a_0}{2}\, x^3 + 2\, x^2$$

Ainsi :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 2\,a_0 - 2 = 2 \\ a_2 = a_1 - 1 + 2 = 3 \\ a_3 = \dfrac{2\,a_2}{3} - \dfrac{a_0}{2} = 1 \end{cases}$$

D'où

$$f(x) = 2 + x + \ x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{20}\,x^5 + o(x^5)$$