Contrôle de Mathématiques AI1 –Décembre 2018

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Dérivabilité (1,5 pts)

Soit $\beta \in]0,+\infty[, a \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, a+\beta[$ et dérivable sur

$]a, a+\beta[$ et telle que $\lim_{x \to a^+} f'(x) = L$

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que f est dérivable à droite en a et que : $f'(a) = L$

Exercice 2 : Fonctions réciproques (10,5 pts)

On considère la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2\, ch^2(x) - 1}$

1) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$
2) Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et montrer qu'elle est dérivable à droite en 0 (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 1
3) Montrer que f définit une bijection de $[0, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser
4) Donner l'expression $f^{-1}(y)$ de la réciproque sur l'intervalle J
5) Donner le domaine de définition de la dérivée de f^{-1} en justifiant puis calculer l'expression $f^{-1\prime}(y)$ de la dérivée de la réciproque sur ce domaine par deux méthodes
6) Donner le développement limité en 0 de $ch(x)$ à l'ordre 4
7) En déduire celui de $2\, ch^2(x) - 1$ à l'ordre 4
8) On donne le développement limité en 0 de $\sqrt{1+t}$ à l'ordre 4 :
$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{8}\, t^2 + \frac{1}{16}\, t^3 - \frac{5}{128} t^4 + o(t^4)$$
En déduire par composition le développement limité de $f(x)$ en 0 à l'ordre 4

Exercice 3 : Développements limités et équivalents (8 pts)

1) En utilisant les développements limités et les équivalents, calculer :
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - cos(x)} \qquad , \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^{sin(x)} - 1 - sin(x)}{x^2}$$
2) Soit f une fonction réelle de la variable réelle admettant un développement limité en 0 à l'ordre 3 :
$$f(x) = 3 - x + 2\, x^2 - 5\, x^3 + o(x^3)$$
Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de son inverse $g = 1/f$

Sans calculs, donner la valeur de $g'(0)$

3) Soit $\beta \in]0, +\infty[$ et soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]-\beta, \beta[$ et telle que :

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = 3$$

f'' admet un développement limité à l'ordre 3 en 0

f vérifie sur $]-\beta, \beta[$: $f''(x) = x\, f'(x) - 2\, f(x) + 2$

Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3

Correction

Exercice 1

Formons, pour $0 < h < \beta$ le taux d'accroissement :

$$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f est continue sur $[a, a+h]$, dérivable sur $]a, a+h[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit :

$$\exists\, c(h) \in \,]a, a+h[\, : f(a+h) - f(a) = \ (a+h-a)\, f'\big(c(h)\big) = h\, f'\big(c(h)\big)$$

Donc :

$$T(h) = f'\big(c(h)\big)$$

Or :

$$a < c(h) < a+h$$

Donc, par théorème des gendarmes :

$$\lim_{h \to 0^+} c(h) = a$$

et par composée des limites :

$$\lim_{h \to 0^+} T(h) = L$$

Donc f est dérivable à droite en a et $f'(a) = L$

Exercice 2

1) On a pour tout x de $[0, +\infty[\, : ch(x) \geq 1$ donc $ch^2(x) \geq 1$ et $2\, ch^2(x) - 1 \geq 1 \geq 0$
   f est donc bien définie
2) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ par théorèmes généraux (produit, somme et composée) et sur cet intervalle, on a :
$$f'(x) = \frac{4\, ch(x) sh(x)}{2\sqrt{2\, ch^2(x) - 1}} = \frac{2\, ch(x) sh(x)}{\sqrt{2\, ch^2(x) - 1}}$$
   Or :
$$\lim_{h \to 0^+} f'(x) = 0$$
   f étant continue sur $[0, +\infty[$ par théorèmes généraux, on peut appliquer le résultat de l'exercice 1. f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$
3) On a $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle définit donc une bijection de $[0, +\infty[$ dans $f([0, +\infty[)$. Or f est continue sur $[0, +\infty[$ et :

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors :

$$f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$$

4) On a :

$$\forall\, (x, y) \in [0, +\infty[\times [1, +\infty[:$$

$$y = f(x) \Leftrightarrow\ y = \sqrt{2\, ch^2(x) - 1}$$

$$\Leftrightarrow\ y^2 = 2\, ch^2(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{y^2 + 1}{2} = \ ch^2(x)$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{\frac{y^2 + 1}{2}} = \ ch(x)$$

$$\Leftrightarrow\ ch^{-1}\left(\sqrt{\frac{y^2 + 1}{2}}\right) = \ x$$

Ainsi :

$$\forall\, y \in [1, +\infty[\, : f^{-1}(y) = ch^{-1}\left(\sqrt{\frac{y^2 + 1}{2}}\right)$$

5) La dérivée de f ne s'annulant qu'en 0, d'image égale à 1, f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$
1ère méthode de calcul de $f^{-1\prime}(y)$: à l'aide de l'expression et en utilisant la dérivée d'une composée. On pose pour cela :

$$t = \sqrt{\frac{y^2 + 1}{2}}$$

alors

$$f^{-1\prime}(y) = ch^{-1\prime}(t)\left(\sqrt{\frac{y^2 + 1}{2}}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{2\,y}{2\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{y^2 + 1}{2} - 1}}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1 - 2}}\ \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{y^2-1}\,\sqrt{y^2+1}}$$
$$= \frac{y}{\sqrt{y^4-1}}$$

2ème méthode de calcul : par la formule (et en notant pour $x \geq 0$ que $sh(x) = \sqrt{ch^2(x)-1}$ donc $sh(ch^{-1}(z)) = \sqrt{z^2-1}$:

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$
$$= \frac{1}{\frac{2\,ch\left(f^{-1}(y)\right)sh(f^{-1}(y))}{\sqrt{2\,ch^2\left(f^{-1}(y)\right)-1}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{\frac{y^2+1}{2}}\right)^2 - 1}}{2\sqrt{\frac{y^2+1}{2}}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{y^2+1}{2}}\right)^2 - 1}}$$
$$= \frac{\sqrt{y^2+1-1}}{2\sqrt{\frac{y^2+1}{2}}\sqrt{\frac{y^2+1}{2}-1}}$$
$$= \frac{y}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{y^2-1}}$$
$$= \frac{y}{\sqrt{y^4-1}}$$

6)

$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^4)$$

7) Effectuons le produit :

$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^4)$$
$$ch(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^4)$$
$$ch^2(x) = 1 + x^2 + \left(\frac{2}{24} + \frac{1}{4}\right)\,x^4 + o(x^4)$$
$$= 1 + x^2 + \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^4)$$

On en déduit :

$$2\,ch^2(x) - 1 = 1 + 2\,x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^4)$$

8) Puis, par composée :

$$\sqrt{2\,ch^2(x)-1} = \sqrt{1+2\,x^2+\frac{2}{3}\,x^4+o(x^4)}$$

$$= 1+\frac{1}{2}\left(2\,x^2+\frac{2}{3}\,x^4\right)-\frac{1}{8}\left(2\,x^2+\frac{2}{3}\,x^4\right)^2+\frac{1}{16}\left(2\,x^2+\frac{2}{3}\,x^4\right)^3-\frac{5}{128}\left(2\,x^2+\frac{2}{3}\,x^4\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1x^2+\frac{1}{3}\,x^4-\frac{1}{8}\,\left(4\,x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)$$

$$= 1+x^2+\frac{1}{3}\,x^4-\frac{1}{2}\,x^4+o(x^4)$$

$$= 1+x^2-\frac{1}{6}\,x^4+o(x^4)$$

Exercice 3

1) On a en 0 :

$$\frac{e^x-1-x}{1-cos(x)} = \frac{1+x+\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)-1-x}{1-\left(1-\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)}{\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)} \sim \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{\frac{1}{2}\,x^2} \sim 1$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{1-cos(x)} = 1$$

Pour la seconde limite, commençons par le développement limité en 0 de e^t :

$$e^t = 1+t+\frac{1}{2}\,t^2+o(t^2)$$

Puis celui de $sin(x)$ en 0 :

$$sin(x) = x+o(x^2)$$

On en déduit par composée :

$$e^{sin(x)} = 1+x+\frac{1}{2}\,x^2+o(x^2)$$

Et :

$$\frac{e^{sin(x)} - 1 - sin(x)}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + o(x^2) - 1 - x + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,x^2 + o(x^2)}{x^2} \sim \frac{\frac{1}{2}\,x^2}{x^2} \sim \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{sin(x)} - 1 - sin(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2) Posons :

$$g(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^{\,2} + a_3\,x^{\,3} + o(x^3)$$

$$f(x) \;=\; 3 \;-\; x \;+\; 2\,x^2 \;-5\,x^3 + o(x^3)$$

$$f(x)\,g(x) = 3\,a_0 + (3\,a_1 - a_0)\,x + (3\,a_2 + 2\,a_0 - a_1)\,x^{\,2} + (3\,a_3 - 5\,a_0 + 2\,a_1 - a_2)\;x^3 + o(x^3)$$

On en déduit le système :

$$\begin{cases} 3\,a_0 = 1 \\ 3\,a_1 - a_0 = 0 \\ 3\,a_2 + 2\,a_0 - a_1 = 0 \\ 3\,a_3 - 5\,a_0 + 2\,a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{3} \\ a_1 = \frac{1}{9} \\ a_2 = \frac{1}{3}(-2\,a_0 + a_1) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right) = -\frac{5}{27} \\ a_3 = \frac{1}{3}(5\,a_0 - 2\,a_1 + a_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{9} - \frac{5}{27}\right) = \frac{34}{81} \end{cases}$$

Soit :

$$g(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\,x - \frac{5}{27}\,x^{\,2} + \frac{34}{81}\,x^{\,3} + o(x^3)$$

En particulier : $g'(0) = \frac{1}{9}$

3) Posons :

$$f''(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^{\,2} + a_3\,x^{\,3} + o(x^3)$$

Alors :

$$f'(x) = f'(0) + a_0\, x + \frac{a_1}{2}\, x^{\,2} + \frac{a_2}{3}\, x^{\,3} + \frac{a_3}{4}\, x^{\,4} + o(x^4)$$

$$= 3 + a_0\, x + \frac{a_1}{2}\, x^{\,2} + o(x^2)$$

Et :

$$f(x) = f(0) + 3\, x + \frac{a_0}{2}\, x^{\,2} + \frac{a_1}{6}\, x^{\,3} + o(x^3)$$

$$= 1 + 3\, x + \frac{a_0}{2}\, x^{\,2} + \frac{a_1}{6}\, x^{\,3} + o(x^3)$$

Reportons ces développements dans l'équation vérifiée par f :

$$a_0 + a_1\, x + a_2\, x^{\,2} + a_3\, x^{\,3} + o(x^3)$$
$$= x\left(3 + a_0\, x + \frac{a_1}{2}\, x^{\,2} + o(x^2)\right) - 2\left(1 + 3\, x + \frac{a_0}{2}\, x^{\,2} + \frac{a_1}{6}\, x^{\,3} + o(x^3)\right) + 2$$

Soit :

$$a_0 + a_1\, x + a_2\, x^{\,2} + a_3\, x^{\,3} + o(x^3) = -3\, x + \frac{1}{6}\, a_1\, x^{\,3} + o(x^3)$$

Par unicité du développement limité, on en déduit :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -3 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = \dfrac{1}{6}\, a_1 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'où :

$$f(x) = 1 + 3\, x - \frac{1}{2}\, x^{\,3} + o(x^3)$$