Second devoir surveillé de Mathématiques AI1

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 : Dérivabilité en un point (6 points)

1) Préliminaire : On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a;b]$ non réduit à un point, dérivable sur $]a;b]$ et pour laquelle il existe un réel L que :

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = L$$

En utilisant le théorème des accroissements finis prouver que f est dérivable en a et que :

$$f'(a) = L$$

2) On considère la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right] \;:\; f(x) = \dfrac{1}{sin(x)} - \dfrac{1}{x} \\ \qquad\qquad f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en 0 (On pourra s'aider d'un développement limité) et en déduire que f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b) Calculer la dérivée de f sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et puis sa limite en 0. En déduire, en utilisant le préliminaire, que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$

c) Quelle est la classe de f : $C_0, D_1, C_1, \ldots$?

Exercice 2 : Equivalents (5 points)

1) A l'aide d'équivalents, calculer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x}{e^{2x+1} + 3x}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+3x^2} - x$

$c)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+3x^2} + x$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin\,(x)}{Ln(1+x)}$

2) Soit a, b, c trois réels strictement positifs et la fonction :

$$f(x) = \frac{a^{b\,x}}{x^c}$$

En écrivant f sous forme d'une exponentielle de son logarithme, en déduire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Exercice 3 : Développements limités (9 points)

1) Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 4 de la fonction :

$$f(x) = (3 + e^x)\, cos(x)$$

2) Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 6 de la fonction :

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

(On pourra commencer par celui de $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$ à un ordre bien choisi et composer)

3) Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction :

$$h(x) = \frac{1}{1 + sin\,(x)}$$

4) Donner le développement limité de Taylor Young en 1 à l'ordre 4 de la fonction :

$$k(x) = cos(x)$$

(On pourra poser $x = 1 + t$ et utiliser une formule de duplication)

5) Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 4 de la fonction l telle que :

$$\begin{cases} l'(x) = x - 2\,x^2 + 5\,x^3 + o(x^3) \\ l(0) = 1 \end{cases}$$

Corrigé :

Exercice 1

1) Préliminaire : Les hypothèses permettent d'affirmer :

$$\forall\, x \in \,]a;b[\; : \; \exists\, c(x) \in \,]a;x[\; : \; f(x) - f(a) = (x-a)\, f'\big(c(x)\big)$$

Or d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \to a^+} c(x) = a$$

On en déduit par composée :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} f'\big(c(x)\big) = \lim_{t \to a^+} f'(t) = L$$

Donc f est dérivable à droite en a et : $f'(a) = L$

2)

a) Nous avons

$$f(x) = \frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - sin\,(x)}{x\; sin\,(x)}$$

Un développement limité en 0 donne alors :

$$f(x) = \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x\; sin\,(x)} \sim \frac{x^3}{6\,x^2} \sim \frac{x}{6}$$

f est donc continue en 0 donc sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b) Calculons sa dérivée sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x) = \frac{-\,cos(x)}{sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2\, cos(x) + sin^2(x)}{x^2\, sin^2(x)}$$

$$= \frac{-x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^2\, sin^2(x)}$$

$$= \frac{-x^2 + \frac{x^4}{2} + x^2 - 2\,\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^2\, sin^2(x)} \sim \frac{\frac{x^4}{6}}{x^2\,x^2} \sim \frac{1}{6}$$

Nous avons donc :

f continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{6}$. On en déduit d'après le préliminaire :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{6}$$

donc que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=\frac{1}{6}$.

c) f' est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc f est de classe C_1 sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

1)

a) En $+\infty$:

$$\frac{e^{x}-x}{e^{2\,x+1}+3\,x}\sim\frac{e^{x}}{e^{2\,x+1}}=\frac{1}{e^{x+1}}$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\quad\frac{e^{x}-x}{e^{2\,x+1}+3\,x}=\lim_{x\to+\infty}\quad\frac{1}{e^{x+1}}=0$$

b) En $+\infty$:

$$1+3\,x^2\sim 3\,x^2$$

donc :

$$\sqrt{1+3\,x^2}\sim\sqrt{3\,x^2}=x\sqrt{3}$$

donc par différence :

$$\sqrt{1+3\,x^2}-x\sim x\left(\sqrt{3}-1\right)$$

et :

$$\lim_{x\to+\infty}\quad\sqrt{1+3\,x^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\quad x\left(\sqrt{3}-1\right)=+\infty$$

c) En $-\infty$ (attention au signe !!)

$$\sqrt{1+3\,x^2}\sim\sqrt{3\,x^2}=-x\sqrt{3}$$

Donc par différence :

$$\sqrt{1+3\,x^2}-x\sim x\left(-\sqrt{3}-1\right)$$

et :

$$\lim_{x\to-\infty}\quad\sqrt{1+3\,x^2}-x=\lim_{x\to+\infty}\quad x\left(-\sqrt{3}-1\right)=+\infty$$

d) En 0 :

$$\sin(x) \sim x$$

$$Ln(1+x) \sim x$$

Donc par différence :

$$\frac{sin\,(x)}{Ln(1+x)} \sim \frac{x}{x} = 1$$

et :

$$\lim_{x\to 0} \quad \frac{sin\,(x)}{Ln(1+x)} = 1$$

2) On a :

$$Ln\,f(x) = Ln\left(\frac{a^{b\,x}}{x^c}\right) = b\,x\,Ln(a) - c\,Ln(x) \sim b\,x\,Ln(a)$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \quad b\,x\,Ln(a) - c\,Ln(x) = \lim_{x\to+\infty} b\,x\,Ln(a) = +\infty$$

Or :

$$f(x) = e^{Ln\,f(x)} = e^{b\,x\,Ln(a) - c\,Ln(x)}$$

Par composée :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$$

<u>Exercice 3</u>

1) On a en 0 :

$$f(x) = (3+e^x)\,cos(x)$$

$$3 + e^x = 4 + 1\,x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$cos(x) \;=\; 1 + 0\,x - \frac{1}{2}x^2 + 0\,x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

On en déduit :

$$f(x) = 4 + x - \frac{4}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{24}x^4 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$= 4 + x - \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

2) On a en 0 :

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}\ t^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{2\times 3}\ t^3 + o(t^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$$

Ainsi, par composée :

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + o(x^6)$$

3) On a en 0 :

$$1 + si\,n(x) \ = \ 1 \ + \ 1\,x \ + \ 0\,x^2 \ - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3)$$

$$h(x) = \ a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + o(x^3)$$

$$(1 + si\,n(x))\,h(x) = \ 1$$

Par identification :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 + a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 = 0 \\ a_3 - \frac{1}{6}\,a_0 + a_2 = 0 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = \frac{1}{6} - 1 = -\frac{5}{6} \end{cases}$$

D’où :

$$h(x) = \ 1 - \ x + \ x^2 - \frac{5}{6}\,x^3 + o(x^3)$$

4) On a en 0 pour la variable t :

$$k(x) = cos(x) = cos(1+t)$$
$$= cos(1)\,cos(t) - sin(1)\,sin(t)$$

$$= cos(1)\,\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)\right) - sin(1)\,\left(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^4)\right)$$

$$= cos(1) - sin(1)\,t - \frac{cos(1)}{2}\ t^2 + \frac{sin(1)}{6}t^3 + \frac{cos(1)}{24}t^4 + o(t^4)$$

donc en 1 pour la variable x :

$$k(x) = cos(1) - sin(1)\,(x-1) - \frac{cos(1)}{2}\,(x-1)^2 + \frac{sin(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{cos(1)}{24}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$$

5) On a :

$$l(x) = l(0) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{5}{4}\,x^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{5}{4}\,x^4 + o(x^4)$$