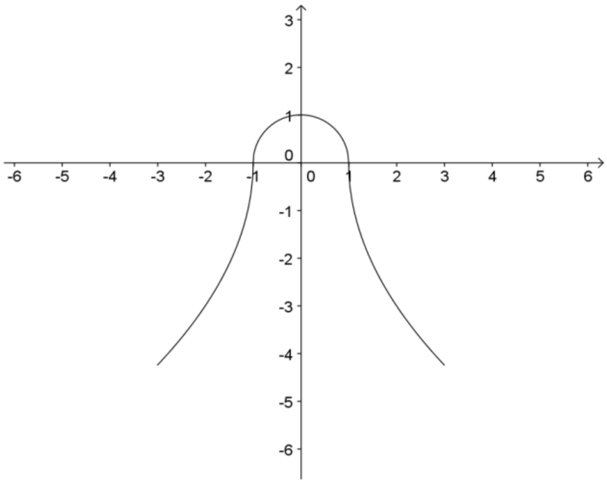
Second devoir surveillé de Mathématiques AI1

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 : Gratte-méninges : Profil d'un volant de Badminton (4 points)

Un professeur de Mathématiques, féru (féru= qui est passionné par) de Badminton, souhaite décrire le profil d'un volant de jeu à l'aide d'une fonction mathématique f.



a) Aidez ce professeur à définir précisément sa fonction sur l'intervalle $[-3; 3]$ sachant que sur $[-1; 1]$ la courbe de f est un demi cercle. Quelques conseils : Si on se donne une courbe $y = f(x)$ alors :
- par la translation de vecteur $m\,\vec{\imath}$ on obtient une courbe d'équation $y = f(x - m)$
- par la symétrie d'axe $(O, \vec{\imath})$ on obtient une courbe d'équation $y = -f(x)$
- par la symétrie d'axe $(O, \vec{\jmath})$ on obtient une courbe d'équation $y = f(-x)$

b) Donner le domaine de continuité et de dérivabilité de f et préciser :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad , \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Exercice 2 : Continuité et dérivabilité (5 points)

1) Rappeler la limite suivante (0,5 point):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{Ln(x)}{x}$$

2) En déduire par changement de variable $x = 1/t$ (0,5 point) :

$$\lim_{x\to 0^+} x\,Ln(x)$$

3) Etudier la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction suivante (4 points) :

$$f(x) = (x-1)^2 \, Ln(x-1) - \ x \qquad si \ \ x > 1$$

$$f(x) = \ sin(x-1) \ \ -1 \qquad\qquad si \ \ x \leq 1$$

<u>Conseil</u> : N'hésitez pas à abuser du changement de variable (ex : $x = 1 + h$) pour vous retrouver dans des situations de limites connues.

<u>**Exercice 3**</u> : Développements limités en 0   (8 points)

1) <u>Produit</u>

Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 5 de la fonction :

$$f(x) = (2 + \sin(x)) \, Ln(1+x)$$

2) <u>Quotient</u>

Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$$

3) <u>Composée</u>

Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 7 de la fonction :

$$f(x) = sin(x - 2\,x^2)$$

4) <u>Primitive</u>

Soit une fonction ayant pour développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 3 :

$$f(x) = 5\,x - x^3 + o(x^3)$$

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de sa primitive F telle que :

$$F(0) = 7$$

5) <u>Equation différentielle (3 points)</u>

Donner le développement limité de Taylor Young en 0 à l'ordre 3 de la fonction solution de l'équation différentielle qui suit. On pourra poser $f"(x) = a + b\,x + o(x)$, intégrer ce développement limité, puis reporter dans l'équation différentielle pour en déduire a et b par identification, puis le développement de $f(x)$.

$$\begin{cases} f"(x) = (x+1)\,f'(x) - f(x) \\ \qquad f(0) = 0 \\ \qquad f'(0) = 1 \end{cases}$$

Corrigé :

<u>Exercice 1</u> :

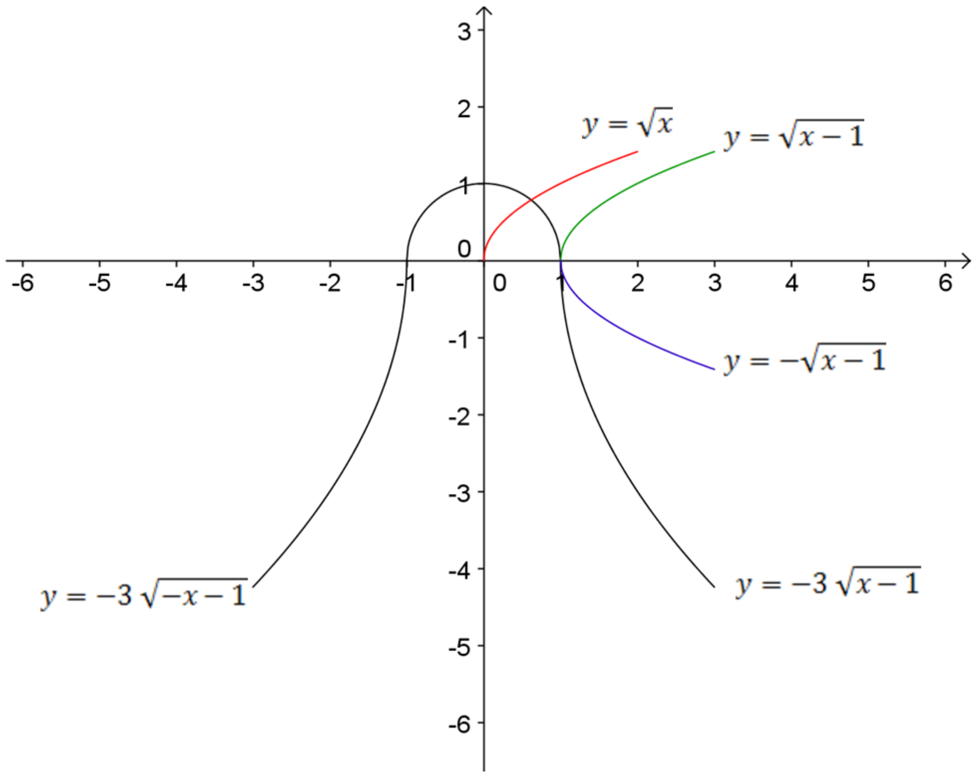
a) Sur $[-1;1]$ le demi-cercle est caractérisé par le système de relations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

qui équivaut à :

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Pour les deux autres parties de courbe nous allons partir de la fonction racine carrée puis procéder à une série de transformations, une translation horizontale de 1 vers la droite, une symétrie par rapport à l'axe des abscisses, une multiplication par le nombre 3 pour obtenir le profil souhaité, puis une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.



Au final, la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} -3\sqrt{-x-1} \text{ sur }]-\infty;-1[\\ \sqrt{1-x^2} \text{ sur } [-1;1] \\ -3\sqrt{x-1} \text{ sur }]1;+\infty[\end{cases}$$

b) f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;1[\,\cup\,]1;+\infty[$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$$

<u>Exercice 2</u>

1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$$

2)

$$\lim_{x\to 0^+}x\,Ln(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\,Ln\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}-\frac{Ln(t)}{t}=0$$

3) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. Reste à faire l'étude en 1

<u>Continuité en 1</u> :

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{h\to 0^+}f(1+h)=\lim_{h\to 0^+}h\times h\,Ln(h)-(1+h)=-1=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{h\to 0^-}f(1+h)=\lim_{h\to 0^-}\sin(h)-1=-1=f(1)$$

donc f est continue à gauche et à droite en 1

<u>Dérivabilité en 1</u> :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\times h\,Ln(h)-(1+h)+1}{h}$$

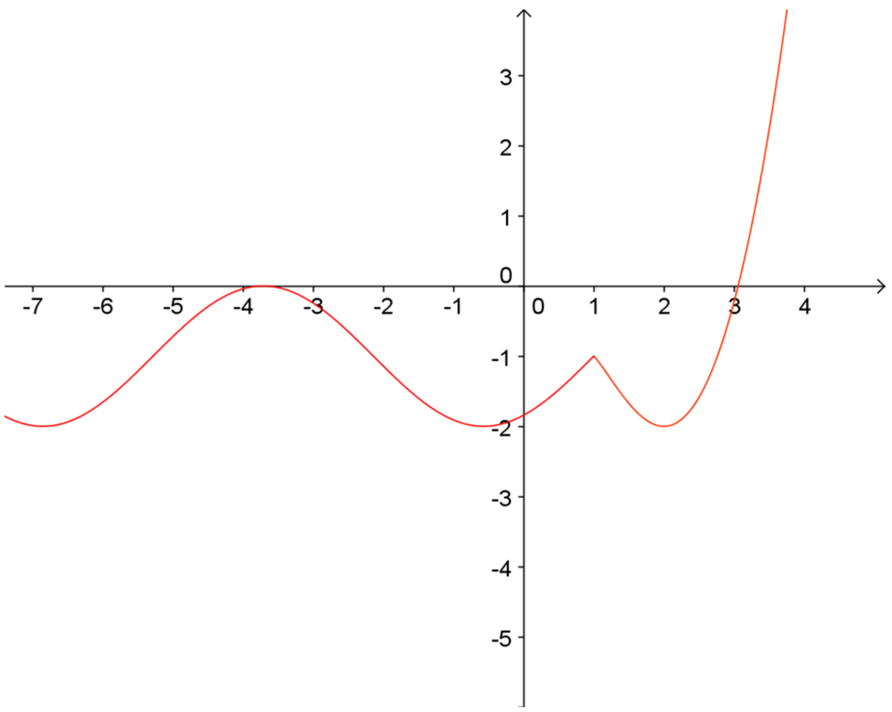
$$=\lim_{h\to 0^+}h\,Ln(h)-1=-1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(h)-1+1}{\mathrm{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(h)}{\mathrm{h}}=1$$

donc f est dérivable à gauche et à droite en 1 mais pas dérivable en 1 car les nombres dérivés à gauche et à droite sont différents.

Voici l'allure de la courbe (dessinée avec geogebra)



Exercice 3 :

1)

$$
\begin{aligned}
2+\sin(x) &= 2 + 1\,x + 0\,x^2 - \frac{1}{6}\,x^3 + 0\,x^4 + \frac{1}{120}\,x^5 + o(x^5)\\
Ln(1+x) &= 0 + 1\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{5}\,x^5 \quad + o(x^5)
\end{aligned}
$$

$$
f(x) = 2\,x + (-x^2 + x^2) + \left(\frac{2}{3}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^3\right) + \left(-\frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^4 - \frac{1}{6}\,x^4\right) + \left(\frac{2}{5}\,x^5 - \frac{1}{4}\,x^5 + \frac{1}{12}\,x^5\right) + o(x^5)
$$

$$
\boxed{f(x) = 2\,x + \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{3}\,x^4 + \frac{7}{30}\,x^5 + o(x^5)}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &= 1 + 0\,x - \frac{1}{2}\,x^2 + \quad 0\,x^3 + o(x^3)\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3 + o(x^3)\\
f(x) &= a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Le produit de $f(x)$ par $\sqrt{1+x}$ conduit au système d'identification :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \frac{1}{2} a_0 + a_1 = 0 \\ -\frac{1}{8} a_0 + \frac{1}{2}\, a_1 + a_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} a_0 - \frac{1}{8}\, a_1 + \frac{1}{2}\, a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} \\ a_3 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

D'où :

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{1}{2}\, x - \frac{1}{8}\, x^2 - \frac{1}{16}\, x^3 + o(x^3)}$$

3)

$$sin(t) = t - \frac{1}{6}\, t^3 + \frac{1}{120}\, t^5 - \frac{1}{5040}\, t^7 + o(t^7)$$

$$f(x) =$$

$$sin(x - 2\,x^2) = (x - 2\,x^2) - \frac{1}{6}\,(x - 2\,x^2)^3 + \frac{1}{120}\,(x - 2\,x^2)^5 - \frac{1}{5040}\,(x - 2\,x^2)^7 + o(x^7)$$

Or :

$x - 2\,x^2 \quad = 1\,x - 2\,x^2$

$(x - 2\,x^2)^2 = \quad x^2 - 4\,x^3 + 4\,x^4$

$(x - 2\,x^2)^3 = \quad x^3 - 6\,x^4 + 12\,x^5 - 8\,x^6$

$(x - 2\,x^2)^4 = \quad x^4 - 8\,x^5 + 24\,x^6 - 32\,x^7 + o(x^7)$

$(x - 2\,x^2)^5 = \quad x^5 - 10\,x^6 + 40\,x^7 + o(x^7)$

$(x - 2\,x^2)^6 = \quad x^6 - 12\,x^7 + o(x^7)$

$(x - 2\,x^2)^7 = \quad x^7 + o(x^7)$

Donc :

$$f(x) =$$

$$x - 2\,x^2 - \frac{1}{6}\,(x^3 - 6\,x^4 + 12\,x^5 - \;8\,x^6) + \frac{1}{120}\,(x^5 - 10\,x^6 + 40\,x^7) - \frac{1}{5040}\,x^7 + \;o(x^7)$$

$$\boxed{f(x) = x - 2\,x^2 - \frac{1}{6}\,x^3 + x^4 - \frac{239}{120}\,x^5 + \frac{5}{4}\,x^6 + \frac{1679}{5040}\,x^7 + o(x^7)}$$

4)

$$f(x) = 5\,x - x^3 + o(x^3)$$

$$\boxed{F(x) = 7 + \frac{5}{2}\,x^2 - \frac{1}{4}\,x^4 + o(x^4)}$$

5)

$$f''(x) = a + b\,x + o(x)$$

$$f'(x) = 1 + a\,x + \frac{b}{2}\,x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = 0 + x + \frac{a}{2}\,x^2 + \frac{b}{6}\,x^3 + o(x^3)$$

Soit en reportant dans l’équation différentielle et en se limitant à l’ordre 1 :

$$a + b\,x + o(x) = 1 + (1 + a)x - x + o(x)$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 + a - 1 \end{cases}$$

Soit

$$a = b = 1$$

D’où :

$$\boxed{f(x) = x + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^3)}$$