Contrôle de Mathématiques AI1 –Décembre 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Complexes (10 points)

a) Equations (3 points):

Résoudre dans C :

$z^2 = 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

$z^2 = 5 - 12\,\mathrm{i}$

b) Puissance d'un nombre complexe (2 points)

Soit $Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

Mettre Z sous forme exponentielle et en déduire la plus petite valeur de l'entier naturel non nul n tel que Z^n soit réel

c) Linéarisation (3 points):

Soit la fonction définie par $f(x) = \sin^4(x)$

Linéariser $f(x)$ et en déduire une primitive sur R

d) Transformation du plan (2 points)

Soit la transformation du plan associée à la fonction complexe :

$f(z) = (1 + i)\,z + 1 - i$

Déterminer la nature de cette transformation et ses éléments caractéristiques

Exercice 2 : Continuité-Dérivabilité (2,5 points)

Soit la fonction définie par :

$f(x) = x\,Ln(x)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur R, préciser en 0 si elles existent la nature des demi tangentes (leur équation) à gauche et à droite.

Exercice 3 : Développements limités (7,5 points)

a) Question de cours (1,5 point) :

Donner le développement limité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ entre $\pi/2$ et $x > \pi/2$

b) Calcul de limite (2 points)

A l'aide de développements limités, déterminer la limite en 0 des fonctions :

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x - \sin(x)}$$

$$g(x) = \frac{Ln(1+x) - x}{x^2}$$

c) Développement limité d'un produit (2 points)

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction :

$$f(x) = e^x \sqrt{1+x}$$

d) Développement de l'inverse (2 points)

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{2 + e^x}$$

Correction

Exercice 1

a)

$z^2 = 2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}$

Une première méthode consiste à factoriser et reconnaitre une forme trigonométrique remarquable, puis passer à la forme exponentielle :

$$2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3} = 2\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Une seconde méthode consiste à calculer le module du nombre complexe :

$$\left|2 + 2\,\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{4 + 12} = 4$$

Puis à factoriser ce module et revenir à la forme trigonométrique ci-dessus.

Ensuite, il suffit de noter la résolution générale dans $\mathbb{C}$ des équations de la forme :

$$z^2 = a^2$$

En effet :

$$z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{z} - \mathrm{a})(\mathrm{z} + \mathrm{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{z} - \mathrm{a} = 0 \; ou \; \mathrm{z} + \mathrm{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = a \; ou \; z = -a$$

Donc :

$$z^2 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z^2 = \left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2 \Leftrightarrow z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \; ou \; z = -2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow z = \sqrt{3} + \mathrm{i} \; ou \; z = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$$

$z^2 = 5 - 12\,\mathrm{i}$

$$|5 - 12\,\mathrm{i}\,| = \sqrt{25 + 144} = 13$$

$$5 - 12\,\mathrm{i} = 13\left(\frac{5}{13} - \mathrm{i}\,\frac{12}{13}\right)$$

La forme trigonométrique n'étant pas remarquable, il vaut mieux tenter une résolution en forme algébrique en posant :

$$z = \mathrm{a} + \mathrm{i}\,\mathrm{b}$$

Soit :
$z^2 = \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 + 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{a}\,\mathrm{b}$

Nous sommes donc ramenés à chercher une solution du système :

$$\begin{cases} \mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 = 5 \\ 2\,\mathrm{a}\,\mathrm{b} = -12 \end{cases}$$

Or un couple de solutions entières évidentes apparait, le couple $(\mathrm{a};\mathrm{b}) = (3;-2)$

Les solutions sont donc $3 - 2\,\mathrm{i}$ et $-3 + 2\,\mathrm{i}$

b)

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$$

La formule de Moivre s'applique :

$$Z^n = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\,\mathrm{n}\,\pi}{12}}$$

$$Z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} :\ \frac{7\,\mathrm{n}\,\pi}{12} = \mathrm{k}\,\pi \ \Leftrightarrow\ \exists\, k \in \mathbb{N} :\ \mathrm{n} = \frac{12\,\mathrm{k}}{7}$$

La plus petite valeur non nulle de n est obtenue pour $\mathrm{k} = 7$ et vaut 12

c)

$$\mathrm{f(x)} = \sin^4(x) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i\,x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i\,x}}}{2\,\mathrm{i}}\right)^4$$

$$= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i\,x}} - 4\,\mathrm{e}^{3\,\mathrm{i\,x}}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i\,x}} + 6\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i\,x}}\,\mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i\,x}} - 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i\,x}}\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i\,x}} + \mathrm{e}^{-4\,\mathrm{i\,x}}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i\,x}} + \mathrm{e}^{-4\,\mathrm{i\,x}} - 4\left(\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i\,x}} + \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i\,x}}\right) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos(4\,\mathrm{x}) - 8\,\cos(2\,\mathrm{x}) + 6\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos(4\,\mathrm{x}) - \frac{1}{2}\cos(2\,\mathrm{x}) + \frac{3}{8}$$

Une primitive est :

$$\mathrm{F(x)} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \sin(4\,\mathrm{x}) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin(2\,\mathrm{x}) + \frac{3}{8}\, x = \frac{1}{32} \sin(4\,\mathrm{x}) - \frac{1}{4} \sin(2\,\mathrm{x}) + \frac{3}{8}\, x$$

d)

$f(z) = (1+i)\, z + 1 - i$

$1 + i = \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

$f(z) = z \Leftrightarrow (1+i)\, z + 1 - i = z$

$\Leftrightarrow (1+i)\, z - z = -1 + i$

$\Leftrightarrow i\, z = -1 + i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-1}{i} + \dfrac{i}{i} = 1 + i$

Donc f est la transformation complexe associée à la similitude plane de centre Ω d'affixe $1 + i$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$

Exercice 2

$f(x) = x\, Ln(x)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$

Continuité :

f est continue sur $]0; +\infty[$ par produit et sur $]-\infty; 0[$

Etudions la continuité en 0

Par changement de variable : $x = 1/t$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\, Ln(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\, Ln\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \to +\infty} -\frac{Ln(t)}{t} = 0 = f(0)$$

donc f est continue à droite en 0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 = f(0)$$

donc f est continue à gauche en 0 et donc f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$

Dérivabilité :

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit et sur $]-\infty;0[$

Etudions la dérivabilité en 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,Ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} Ln(x) = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0 mais sa courbe présente une demi-tangente verticale

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et donc $f'_g(0) = 0$. La courbe présente une demi-tangente horizontale.

Exercice 3 :

a)

Développement limité de Taylor Lagrange à l'ordre 2 pour la fonction $f(x) = \sin(x)$ entre $\pi/2$ et $x > \pi/2$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(x-\frac{\pi}{2}\right) f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2\,!} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3}{3\,!} f'''(c)$$

où $c \in \left]\frac{\pi}{2}\,;x\right[$

Or :

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

$f'''(x) = -\cos(x)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

D’où :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \cos(c)$$

b)

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x - \sin(x)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\right)}{x - \left(\mathrm{x} - \frac{1}{6}\,\mathrm{x}^3 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^3)\right)} = \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)}{\frac{1}{6}\,\mathrm{x}^3 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^3)} \sim \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2}{\frac{1}{6}\,\mathrm{x}^3} \sim \frac{3}{\mathrm{x}}$$

Or :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{\mathrm{x}} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3}{\mathrm{x}} = -\infty$$

Donc

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$g(x) = \frac{Ln(1 + x) - x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2) - \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2} = -\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1) \sim -\frac{1}{2}$$

Donc

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\frac{1}{2}$$

c)

$$f(x) = e^x \sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\,x + \frac{7}{8}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$$

d)

$$f(x) = \frac{1}{2+e^x} = \frac{1}{2 + 1 + \ x + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)} = \frac{1}{3 + \ x + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)}$$

Posons :

$$f(x) = c + b\,x + a\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$$

alors :

$$\left(3 + \ x + \frac{1}{2}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\right)\ (c + b\,x + a\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)\,) = 1$$

$$3\,c + \ (3\,b + c)\,x + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{c} + \mathrm{b} + 3\,\mathrm{a}\right)\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2) = 1$$

$$\begin{cases} 3\,c = 1 \\ 3\,b + c = 0 \\ \frac{1}{2}\,\mathrm{c} + \mathrm{b} + 3\,\mathrm{a} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \\ \mathrm{a} = -\frac{1}{54} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\,x - \frac{1}{54}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$$