Devoir sur Table AI3 –Mars 2020

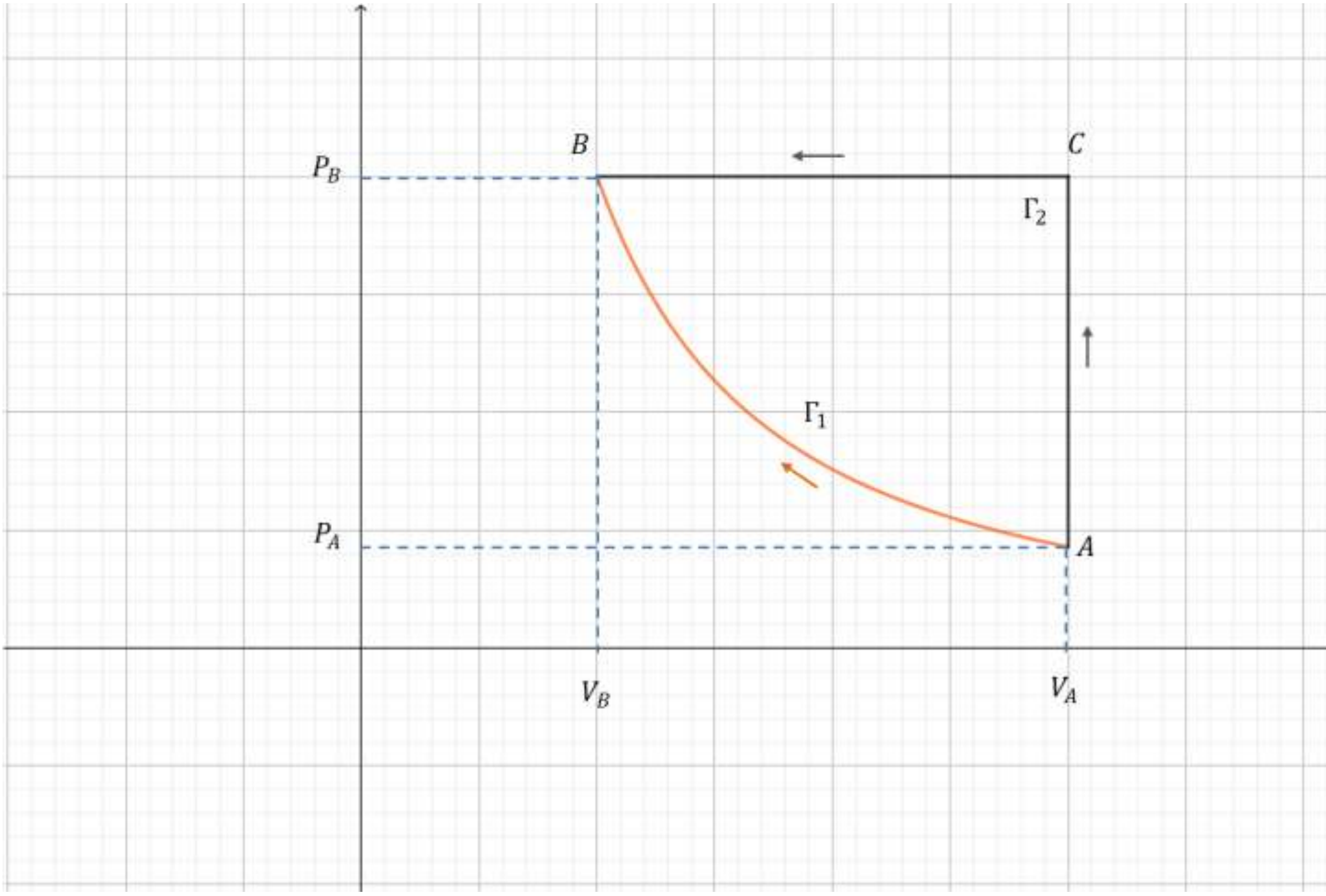
Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : <u>transformation d'un gaz parfait (10 pts)</u>

On fait passer une certaine quantité de gaz parfait d'un état d'équilibre pression, volume température représenté par le point $A(P_A, V_A, T_A)$ à l'état d'équilibre représenté par le point $A(P_B = 5\,P_A, V_B, T_B)$ par deux chemins distincts réversibles :

Γ_1 : isotherme réversible

Γ_2 : transformation de A à C à volume constant suivie d'une transformation de C à B à pression constante



1) Définir ce que l'on appelle une transformation réversible (1 pt)
2) Comment nomme-t-on une transformation à volume constant ? (0,5 pt)
3) Comment nomme-t-on une transformation à pression constante ? (0,5 pt)
4) Quel est le nom complet de la transformation Γ_1 ? (0,5 pt)
5) Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait en spécifiant les unités de chaque grandeur (1 pt)
6) Pour $P_A = 0{,}8\,bar$, $V_A = 1\,L$, $T_A = 300\,K$, déterminer le nombre de moles de gaz (0,5 pt)

Donnée : $R = 8{,}314\ J\ K^{-1}\ mol^{-1}$

7) Déterminer V_B et T_B (0,5 pt)
8) Donner, en en précisant l'unité, la valeur numérique de la capacité thermique à volume constant de l'air étudié, à savoir (0,5 pt) :

$$C_V = \frac{n\,R}{\gamma - 1}$$

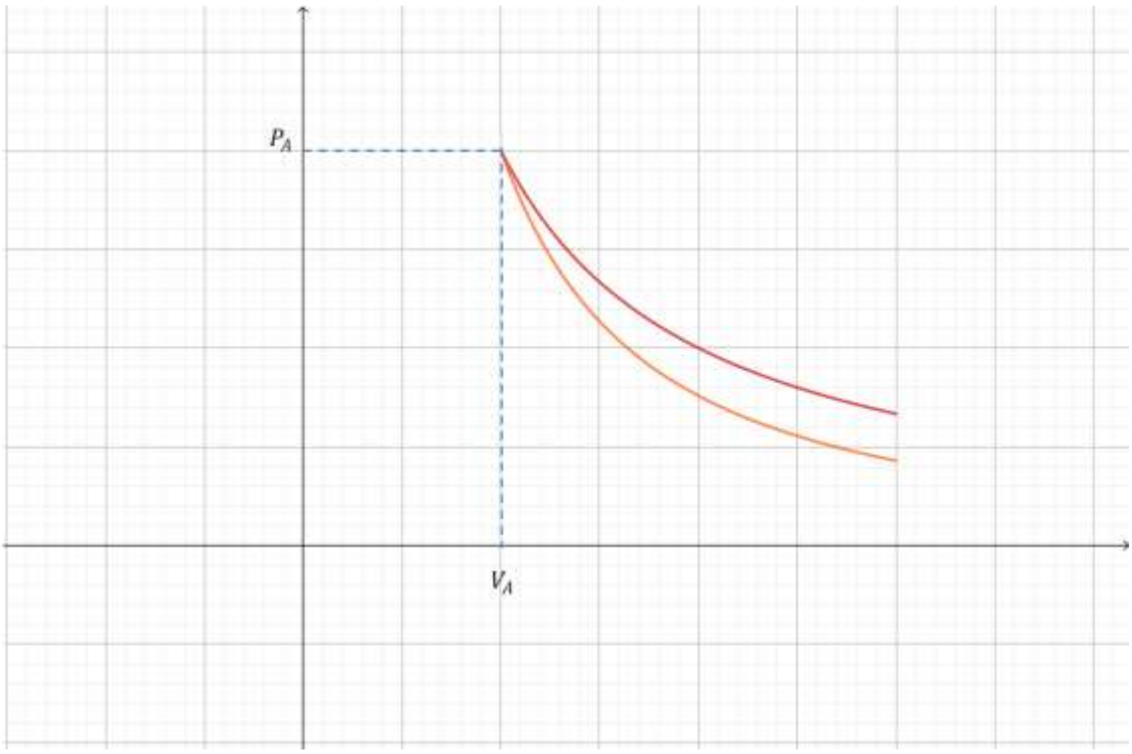
Donnée : $\gamma = 1{,}4$

9) Déterminer le travail W_{AB} et la chaleur échangée Q_{AB} par le gaz au cours de la transformation isotherme (1 pt)
10) Déterminer le travail W_{AC} et la chaleur échangée Q_{AC} par le gaz au cours de la transformation à volume constant (1 pt)
11) Déterminer le travail W_{CB} et la chaleur échangée Q_{CB} par le gaz au cours de la transformation à pression constante (1 pt)
12) En déduire le travail et la chaleur échangée dans la transformation Γ_2. Que constate-t-on ? Etait ce prévisible et en vertu de quel principe ? (1 pt)

13) Par quoi est représenté, dans le diagramme de Clapeyron, le travail échangé par le gaz dans la transformation isotherme (hachurer la zone et indiquer qu'est ce qui, sur le diagramme, détermine le signe de ce travail) ? (1 pt)

Exercice 2 : Comparaison des pentes en un même point pour deux transformations (10 pts)

On considère deux transformations réversibles dans le diagramme de Clapeyron pour un gaz parfait de paramètre $\gamma = 1{,}4$ (diagramme (P,V))



Γ_1 : détente isotherme réversible de A à B

Γ_2 : détente adiabatique réversible de A à C

On donne

$$P_A = 3\ bar, V_A = 25\ cm^3$$

1) définir ce qu'est une détente adiabatique réversible et faire un schéma d'un dispositif expérimental qui permettrait de réaliser cette transformation. On représentera le dispositif dans l'état initial et dans l'état final (1,5 pt)

2) Compléter le diagramme de Clapeyron par des flèches pour indiquer le sens des transformations (1pt)

3) On se place en un point de la détente adiabatique réversible et on fait varier les paramètres d'état du système de quantités infinitésimales de pression, volume et température, dP, dV, dT lesquelles sont associées à des échanges de travail et de chaleur infinitésimaux δW et δQ et d'une variation d'énergie interne dU. Etablir les 3 formules de Laplace dont (3 pt) :

$$P\ V^{\gamma} = Constante$$

4) En déduire l'équation de la détente adiabatique dans le diagramme de Clapeyron, c'est-à-dire la fonction $P = f(V)$ (1 pt).

5) Déterminer l'équation de la détente isotherme dans le diagramme de Clapeyron c'est-à-dire la fonction $P = g(V)$ (1 pt)

6) Calculer la pente $|f'(V_A)|$ de la détente adiabatique au point A et montrer qu'elle est supérieure, en valeur absolue, à la pente de l'isotherme $|g'(V_A)|$ (on laissera des formules littérales). Identifier dans le diagramme de Clapeyron ci-dessus les deux transformations et faire apparaitre sur ce diagramme les points B et C (1,5 pt)

7)) Quel est le signe du travail échangé par le gaz pour chacune de ces deux transformations ? Justifier (1 pt)

Correction

Exercice 1

1) Une transformation réversible est une transformation constituée d'une succession d'états d'équilibre
2) Une transformation à volume constant est une transformation isochore
3) Une transformation à pression constante est une transformation isobare
4) C'est une compression isotherme réversible
5)

$$P\,V = n\,R\,T$$

$$P \text{ en } Pa, V \text{ en } m^3, n \text{ en } mol, T \text{ en } K$$

6)

$$n = \frac{P\,V}{R\,T} = \frac{0{,}8 \times 10^5 \times 10^{-3}}{8{,}314 \times 300} = 3{,}2 \times 10^{-2}\,mol$$

7) Le gaz étant à même température en A et en B on a :

$$P_A\,V_A = P_B\,V_B$$

Soit :

$$V_B = \frac{P_A}{P_B}\,V_A = \frac{1}{5}\,V_A = 0{,}2\,L$$

En outre, les deux points étant reliés par une transformation isotherme, on a :

$$T_B = T_A$$

8)

$$C_V = \frac{n\,R}{\gamma - 1} = \frac{P_A\,V_A}{(\gamma - 1)\,T_A} = \frac{0{,}8 \times 10^5 \times 10^{-3}}{0{,}4 \times 300} = \frac{80}{4 \times 30} = \frac{20}{30} = 0{,}67\,J\,K^{-1}$$

9)

$$W_{AB} = -\int_{V_A}^{V_B} P\,dV = -\int_{V_A}^{V_B} \frac{n\,R\,T_A}{V}\,dV = n\,R\,T_A\,ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = P_A\,V_A\,ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$
$$= 0{,}8 \times 10^5 \times 10^{-3}\,ln(5) = 129\,J$$
$$Q_{AB} = \Delta U - W_{AB} = -W_{AB} = -129\,J$$

10)

$$W_{AC} = 0$$
$$Q_{AC} = \Delta U - W_{AC} = \Delta U = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\,(T_C - T_A) = \frac{n\,R\,T_C - n\,R\,T_A}{\gamma - 1} = \frac{P_C\,V_C - P_A\,V_A}{\gamma - 1}$$

$$= \frac{P_B V_A - P_A V_A}{\gamma - 1} = \frac{(P_B - P_A) V_A}{\gamma - 1} = \frac{4 P_A V_A}{\gamma - 1} = \frac{4 \times 0{,}8 \times 10^5 \times 10^{-3}}{0{,}4} = 800 \, J$$

11)

$$W_{CB} = -P_B (V_B - V_C) = -5 P_A (V_B - V_A) = -5 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 10^5 (0{,}2 - 1) \times 10^{-3} = 320 \, J$$

$$Q_{CB} = \Delta H = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_B - T_C) = \frac{\gamma (P_B V_B - P_C V_C)}{\gamma - 1} = \frac{\gamma P_B (V_B - V_A)}{\gamma - 1} = \frac{\gamma 5 P_A (V_B - V_A)}{\gamma - 1}$$

$$= -\frac{1{,}4}{0{,}4} \times 320 = -1120 \, J$$

12)

$$W_{\Gamma_2} = W_{AC} + W_{CB} = 320 \ J$$

$$Q_{\Gamma_2} = Q_{AC} + Q_{CB} = 800 - 1120 = -320 \, J$$

$$W_{\Gamma_2} + Q_{\Gamma_2} = 0$$

$$W_{\Gamma_1} + Q_{\Gamma_1} = 0$$

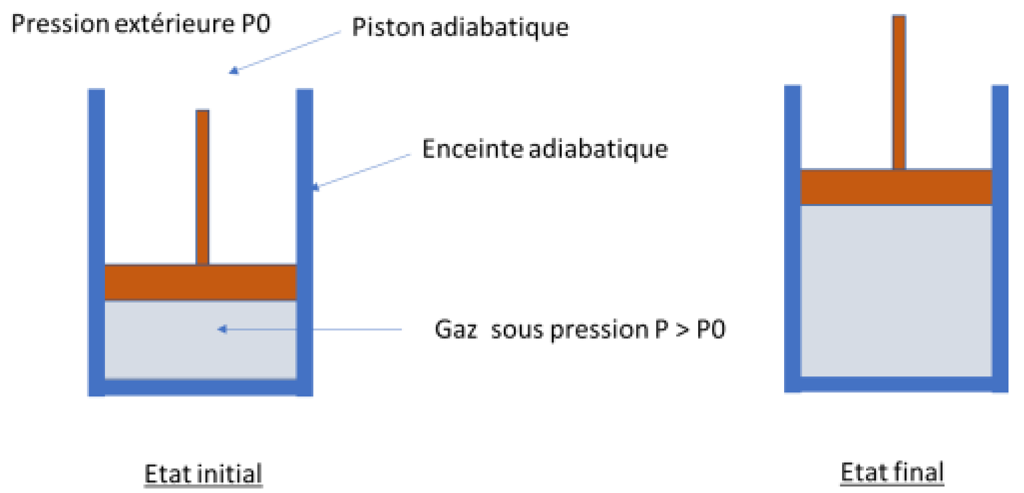
La somme des travaux échangés entre A et B état égale à la variation d'énergie interne (premier principe), elle ne dépend pas du chemin suivi.

13) Le travail est représenté par l'aire de la surface située entre le chemin de transformation et l'axe des abscisses et son signe est donné par la règle suivante : si le volume augmente au cours de la transformation, alors $-P \, dV < 0$ donc $W < 0$ et si le volume diminue : $W > 0$. Si la transformation est isochore et ne reçoit pas de travail autre que les forces pressantes alors $W = 0$.

Exercice 2

1) Une détente adiabatique réversible est une transformation quasi-statique sans échange de chaleur au cours de laquelle la pression du gaz diminue.

2)



3) au cours de la transformation adiabatique réversible on a :

$$\delta Q = 0$$

$$\delta W = -P\ dV$$

$$dU = \frac{n\ R}{\gamma - 1}\ dT$$

Et d'après le premier principe :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Donc :

$$\frac{n\ R}{\gamma - 1}\ dT = -P\ dV$$

Or, pour un gaz parfait :

$$P = \frac{n\ R\ T}{V}$$

Donc :

$$\frac{n\ R}{\gamma - 1}\ dT = -\frac{n\ R\ T}{V}\ dV$$

Soit :

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1)\ \frac{dV}{V}$$

D'où :

$$dLn(T) + (\gamma - 1)\ dLn(V) = 0$$

Soit :

$$d(T\ V^{\gamma - 1}) = 0$$

Donc :

$$T\ V^{\gamma - 1} = Constante$$

Les deux autres s'en déduisent avec l'équation d'état :

$$P\ V^{\gamma} = Constante$$

$$T^{\gamma}\ P^{1-\gamma} = Constante$$

4) On a pour l'adiabatique réversible :

$$P\ V^{\gamma} = P_A\ {V_A}^{\gamma}$$

Soit :

$$P = \frac{P_A\, {V_A}^{\gamma}}{V^{\gamma}} = \frac{3 \times (25 \times 10^{-5})^{1,4}}{V^{1,4}} = \frac{}{V^{1,4}} \quad (bar)$$

5) On a pour l'isotherme :

$$P\, V = P_A\, V_A$$

Soit :

$$P \ = \frac{P_A\, V_A}{V} = \frac{7{,}5 \times 10^{-4}}{V} \ (bar)$$

5)

$$f'(V) = -\gamma\, \frac{P_A\, {V_A}^{\gamma}}{V^{\gamma+1}}$$

$$|f'(V_A)| = \gamma \frac{P_A}{V_A}$$

$$g'(V) = -\ \frac{P_A\, V_A}{V^2}$$

$$|g'(V_A)| = \frac{P_A}{V_A}$$

Donc :

$$|f'(V_A)| = \gamma\ |g'(V_A)| > |g'(V_A)|$$

7) Le travail est donné par l'intégrale :

$$\int_{A \to B} -P\, dV$$

Sa valeur est donc l'aire située entre la courbe isotherme et l'axe des abscisses et son signe est négatif pour les deux transformations car pour chacune, on a $dV > 0$ donc $-P\, dV < 0$