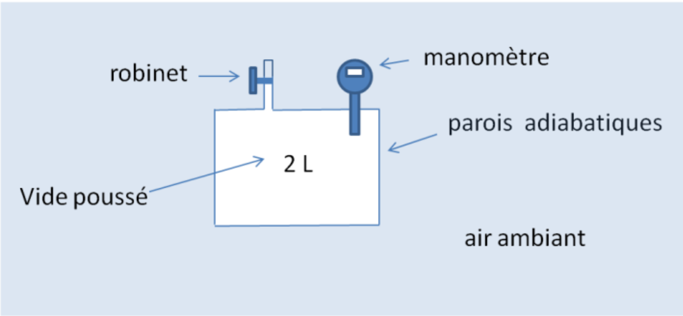
Devoir sur Table AI3 – 22 Mars 2018

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : <u>transformation irréversible dans le vide (12 pts)</u>



On considère un récipient cylindrique de volume $V_1 = 2\ L$ dans lequel on a fait un vide poussé. Le récipient est isolé thermiquement de l'extérieur et on le considère comme formé de parois qui ne peuvent pas échanger de chaleur avec leur environnement. Il est également muni d'un robinet et d'un manomètre mesurant la pression du gaz qui l'occupe. On ouvre le robinet afin de laisser l'air ambiant, qui se trouve à la température $T_0 = 300\ K$ et à la pression $P_0 = 1\ bar$ emplir le récipient et on ferme le robinet dès que le manomètre affiche la pression P_0. On s'intéresse à la transformation de l'air qui est entré dans le récipient, depuis l'état où il était en dehors de ce dernier à P_0, T_0, formé de n moles occupant alors un volume V_0, à l'état où il est dans le récipient, formé de n moles occupant donc un volume V_1 à la pression P_0 et à une température T_1.

1) Définir ce que l'on appelle une transformation adiabatique (0,5 pt)
2) Définir ce qu'on appelle une transformation adiabatique réversible (0,5 pt)
3) Justifier que la transformation étudiée est adiabatique et irréversible (0,5 pt)
4) Montrer que le travail reçu par l'air au cours de la transformation est : $W = P_0\ V_0$ (1 pt)
5) Exprimer le travail précédent en fonction du nombre de moles d'air n, de la constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\ J\ K^{-1}\ mol^{-1}$ et de T_0 (0,5 pt)
6) Exprimer la variation d'énergie interne au cours de la transformation en fonction de $n, R, T_0, T_1, \gamma = 1{,}4$ (1 pt)
7) En appliquant le premier principe, en déduire T_1 en fonction de T_0 et γ puis faire l'application numérique (1,5 pt)
8) Exprimer la variation d'énergie interne en fonction de P_0, V_1, γ et faire l'application numérique (1,5 pt).
9) En déduire la valeur numérique de la capacité thermique à volume constant de l'air étudié à savoir :
$$C_V = \frac{n\ R}{\gamma - 1}$$
10) Rappeler la formule donnant l'entropie d'un gaz parfait puis calculer la variation d'entropie de la transformation (1,5 pt)

Le récipient de masse : $m_R = 0{,}70\, kg$ est maintenant considéré comme étant en verre de capacité thermique massique : $c_R = 0{,}70\, kJ\, K^{-1}\, kg^{-1}$. Il est bien isolé de l'extérieur et on considérera qu'il ne peut échanger de la chaleur qu'avec le gaz qu'il contient. On reprend la transformation précédente et on admet que par sa rapidité, un échange de chaleur conséquent n'a pas eu le temps de se produire entre l'air et le récipient entre l'ouverture et la fermeture du robinet. On considère alors la transformation qui suit où le récipient passe d'une température initiale T_0 à une température finale d'équilibre T_2 tandis que l'air du récipient passe de façon isochore de la température T_1 calculée précédemment à la température T_2.

11) Déterminer la chaleur échangée par le récipient avec l'air au cours de la transformation en fonction des paramètres. Donner une formule littérale (0,5 pt)
12) Déterminer la température finale T_2 en appliquant le premier principe à l'air du récipient. En donner une formule littérale puis faire l'application numérique. (1,5 pt)
13) Déterminer la pression finale P_2 de l'air dans le récipient (1 pt)

Exercice 2 : <u>Calcul de travail et de chaleur échangés (8 pts)</u>

Soit un gaz parfait de paramètres initiaux $P_0 = 1\, bar, V_0 = 25\, L, n = 1\, mole$ et de rapport de capacité thermique isobare à capacité thermique isochore $\gamma = 1{,}4$

Pour les quatre transformations de ce gaz parfait qui suivent, calculer les échanges de travail et de chaleur, les variations d'énergie interne et les variations d'entropie. On fera les calculs théoriques en expliquant les noms des principes employés puis on donnera les valeurs numériques dans les unités adaptées.

1) Compression isotherme réversible faisant passer la pression du gaz à $P_1 = 2\, bar$ (3 pts)
2) Compression adiabatique réversible faisant passer la pression du gaz à $P_1 = 2\, bar$ (2 pts)
3) Chauffage isochore pendant 10 minutes à l'aide d'une résistance de puissance 20 W (1,5 pts)
4) Chauffage isobare pendant 10 minutes à l'aide d'une résistance de puissance 20 W (1,5 pts)

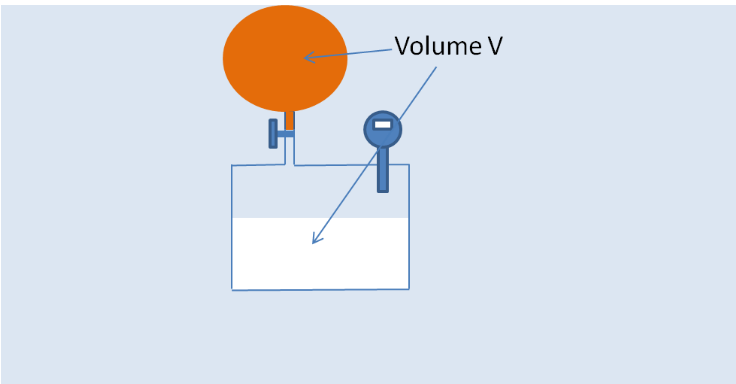
<u>Donnée</u> :

constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\, J\, K^{-1}\, mol^{-1}$

Correction

Exercice 1

1) Une transformation adiabatique est une transformation au cours de laquelle il n'y a aucun échange de chaleur entre le système étudié et l'extérieur
2) Une transformation adiabatique réversible est une transformation adiabatique faite d'une succession d'états d'équilibre.
3) Lorsque l'air pénètre dans le récipient, il s'y détend brutalement. Il n'est alors pas possible de définir des grandeurs d'états telles que pression, température pendant cette transformation mais seulement en fin de transformation. Cette dernière est irréversible, ce qui signifie qu'elle ne peut être reproduite de l'état final à l'état initial selon la même succession d'états.
4) Notons V le volume d'air étudié qui n'est pas encore entré dans le récipient.



Entre deux instants proches, la surface de cet air en contact avec l'air extérieur balaie le volume $-dV > 0$ sous une pression P_0. l'air étudié reçoit donc le travail :

$$\delta W = -P_0\, dV$$

et le travail total est :

$$W = \int_{V_0}^{0} -P_0\, dV = P_0\, V_0$$

5) En appliquant la loi des gaz parfaits :

$$W = n\, R\, T_0$$

6) On a :

$$\Delta U = \frac{n\, R}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_0)$$

7) Le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = W + Q = W$$

ainsi :

$$\frac{n\,R}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_0) = n\,R\,T_0$$

soit :

$$T_1 = \gamma\,T_0$$

numériquement :

$$T_1 = 1{,}4 \times 300 = 420\,K$$

8) La loi des gaz parfaits permet d'écrire :

$$\frac{P_0\,V_0}{T_0} = \frac{P_0\,V_1}{T_1}$$

soit :

$$\Delta U = P_0\,V_0 = \frac{P_0\,V_1}{\gamma}$$

numériquement :

$$\Delta U = \frac{10^5 \times 2 \times 10^{-3}}{1{,}4} \approx 143\,J$$

9) On a :

$$C_V = \frac{n\,R\,T_0}{(\gamma - 1)\,T_0} = \frac{\Delta U}{(\gamma - 1)\,T_0} = \frac{143}{0{,}4 \times 300} \approx 1{,}2\,J\,K^{-1}$$

10) L'entropie d'un gaz parfait est donnée par :

$$S = C_v\,Ln(P\,V^{\gamma}) + cte$$

Sa variation est donc :

$$\Delta S = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\,Ln\left(\frac{P_0\,{V_1}^{\gamma}}{P_0\,{V_0}^{\gamma}}\right) = \frac{\gamma\,n\,R}{\gamma - 1} Ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \frac{\gamma\,n\,R}{\gamma - 1} Ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) = \gamma\,C_V\,Ln(\gamma)$$

numériquement :

$$\Delta S = 1{,}4 \times 1{,}2\,Ln(1{,}4) \approx 0{,}57\,J\,K^{-1}$$

11) La chaleur échangée par le récipient est :

$$Q = m_R\,c_R\,(T_1 - T_0)$$

12) La chaleur échangée par l'air étudié étant $-Q$, le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = W + (-Q)$$

soit :

$$\frac{n\,R}{\gamma-1}\,(T_2-T_1)=-m_R\,c_R\,(T_2-T_0)$$

$$C_v\,(T_2-\gamma\,T_0)=-m_R\,c_R\,(T_2-T_0)$$

$$(C_v+m_R\,c_R)\,T_2=(\gamma\,C_v+m_R\,c_R)\,T_0$$

d'où :

$$\boxed{T_2=\frac{\gamma\,C_v+m_R\,c_R}{C_v+m_R\,c_R}T_0}$$

numériquement :

$$T_2=\frac{1{,}4\times 1{,}2+0{,}7\times\ 700}{1{,}2+0{,}7\times\ 700}\times 300\approx T_0$$

13) La loi des gaz parfaits permet d'écrire :

$$\frac{P_2}{T_2}=\frac{P_0}{T_1}$$

soit :

$$P_2\approx\frac{T_0}{T_1}P_0=\frac{P_0}{\gamma}<P_0$$

numériquement :

$$P_2=\frac{P_0}{1{,}4}\approx 0{,}7\ bar$$

Exercice 2 :

On notera le taux de compression :

$$x=\frac{P_1}{P_0}$$

1) le premier principe permet d'écrire, tout au long de la transformation :

$$dU=\delta W+\delta Q$$

Or l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépendant que de la température, on a :

$$dU=0$$

donc :

$$\delta Q=-\delta W=P\,dV=n\,R\,T\,\frac{dV}{V}=d\big(n\,R\,T\,Ln(V)\big)$$

Ainsi :

$$Q = -W = \; n\,R\,T\,Ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = P_0\,V_0\,Ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$$

numériquement :

$$Q = -W = -10^{\,5} \times 25 \times 10^{-3} \times Ln(2) = -1{,}7\;kJ$$

<u>Variation d'entropie</u> :

$$\Delta S = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(\frac{P_1\,{V_1}^{\gamma}}{P_0\,{V_0}^{\gamma}}\right) = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(x\,\left(\frac{1}{x}\right)^{\gamma}\right) = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln(x^{1-\gamma}\,) = -n\,R\;Ln(x\,)$$

numériquement :

$$\Delta S = -8{,}314\;ln(2) \approx -5{,}8\;J\;K^{-1}$$

2) Au cours de la transformation on a :

$$\delta Q = 0$$

donc :

$$dU = \delta W$$

et :

$$W = \Delta U = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;\Delta T = \frac{\Delta(P\;V)}{\gamma - 1} = \frac{P_1\,V_1 - P_0\,V_0}{\gamma - 1}$$

l'équation de l'isentropique donne en outre :

$$P_1\,{V_1}^{\gamma} = P_0\,{V_0}^{\gamma}$$

soit :

$$V_1 = V_0\,x^{-\frac{1}{\gamma}}$$

et :

$$W = \frac{x\,P_0\,V_0\,x^{-\frac{1}{\gamma}} - P_0\,V_0}{\gamma - 1} = P_0\,V_0\;\frac{x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1}{\gamma - 1}$$

numériquement :

$$W = \;10^{\,5} \times 25 \times 10^{-3}\;\frac{2^{\frac{0{,}4}{1{,}4}} - 1}{0{,}4} \approx 1{,}4\;kJ$$

La transformation étant isentropique, il n'y a pas de variation d'entropie

3) Le premier principe donne, en notant Pu la puissance de la résistance et Δt sa durée de chauffage :

$$\Delta U = Q = Pu\,\Delta t$$

numériquement :

$$\Delta U = 20 \times 10 \times 60 = 12\;kJ$$

<u>Variation d'entropie</u> :

$$\Delta S = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(\frac{P_1\,{V_1}^{\gamma}}{P_0\,{V_0}^{\gamma}}\right) = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

sachant :

$$\Delta U = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;(T_1 - T_0)$$

Soit :

$$T_1 = T_0 + \frac{(\gamma - 1)\,\Delta U}{n\,R} = \frac{P_0\,V_0 + (\gamma - 1)\,\Delta U}{n\,R}$$

numériquement :

$$T_0 = \frac{P_0\,V_0}{n\,R} = \frac{10^5 \times 25 \times 10^{-3}}{8{,}314} \approx 301\;K$$

$$T_1 = \frac{P_0\,V_0 + (\gamma - 1)\,\Delta U}{n\,R} = 878\;K$$

$$\Delta S = \frac{8{,}314}{0{,}4}\;ln\left(\frac{878}{301}\right) \approx 22\;J\;K^{-1}$$

4) Le premier principe donne :

$$\Delta H = Q = Pu\,\Delta t$$

$$\Delta U = \frac{\Delta H}{\gamma} = \frac{Pu\,\Delta t}{\gamma} = \frac{12}{1{,}4} = 8{,}6\;kJ$$

$$T_1 = \frac{P_0\,V_0 + (\gamma - 1)\,\Delta U}{n\,R} = 714\;K$$

$$\Delta S = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(\frac{{T_1}^{\gamma}\,{P_1}^{1-\gamma}}{{T_0}^{\gamma}\,{P_0}^{1-\gamma}}\right) = \frac{\gamma\,n\,R}{\gamma - 1}\;Ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$= \frac{1{,}4 \times 8{,}314}{0{,}4}\;ln\left(\frac{714}{301}\right) \approx 25\;J\;K^{-1}$$