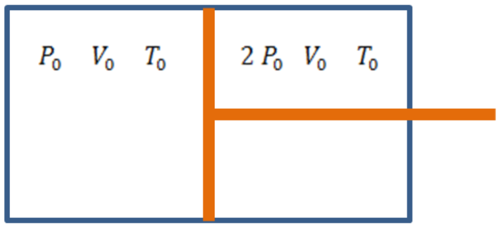
Devoir surveillé de Thermodynamique –Mars 2017

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : <u>Transformations adiabatiques en vase clos (5 pts)</u>



Un piston mobile sépare un cylindre calorifugé en deux compartiments de même volume V_0, contenant de l'air considéré comme un gaz parfait à la température T_0, à une pression P_0 dans le premier compartiment et une pression double $2\ P_0$ dans le second compartiment. Le piston subissant des pressions différentes sur ses deux faces, n'est pas en équilibre et il faut appliquer une force pour le maintenir dans sa position. On relâche alors très lentement la force afin de laisser le piston atteindre un état d'équilibre où les pressions dans les deux compartiments ont une même valeur P_1. L'air du compartiment 1 occupe alors un volume V_1 celui du compartiment 2, un volume V_2. On supposera que le piston ne permet pas de transfert de chaleur d'un compartiment à l'autre et qu'au cours de la transformation, les deux gaz n'échangent pas de chaleur avec l'extérieur.

1) Comment qualifie-t-on une transformation sans échange de chaleur ?
2) Les transformations des gaz dans chaque compartiment étant considérées comme quasi-statiques (réversibles), donner les relations existant entre $P_0, P_1, V_0, V_1, V_2, \gamma$
3) En déduire le rapport $V_0/\ V_1$ en fonction de γ puis P_1 en fonction de P_0 et de γ
4) Faire l'application numérique de V_1, V_2, P_1 pour :

$$P_0 = 1\ atm, V_0 = 2\ L\ , T_0 = 300\ K,\ \ \gamma = \frac{7}{5}$$

5) En déduire la température finale T_1 dans le premier compartiment et celle T_2 dans le second compartiment

Exercice 2 : <u>Calcul de variation d'entropie d'un gaz (4 pts)</u>

La capacité thermique massique à pression constante d'un gaz sur une plage de température $[T_0; T_2\ ]$ est une fonction affine de la température de la forme :

$$c_p = a + b\ T$$

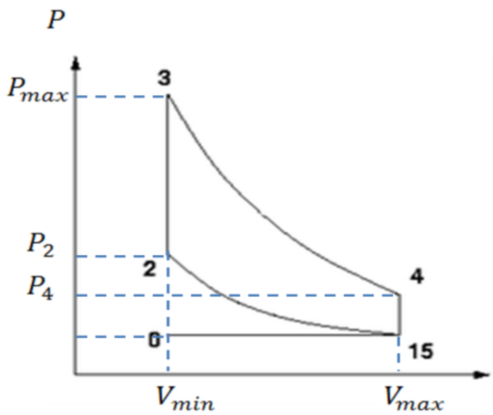
1) Donner les unités de a et b en utilisant les symboles J, kg et K
2) Rappeler la relation liant l'échange élémentaire de chaleur δQ, la variation élémentaire d'entropie dS et la température absolue T pour une transformation infinitésimale quasi-statique (réversible) d'un système
3) En intégrant la relation précédente le long d'un chemin de transformation quasi-statique, calculer la variation d'entropie d'une mole de gaz entre l'état de température T_0 et de pression P_0 et celui de température T_1 et de même pression P_0
4) On donne pour le diazote les valeurs expérimentales : $a = 1{,}04 \times 10^3$, $b = 1{,}1 \times 10^{-2}$ ainsi que la masse molaire : $M = 28\ g\ mol^{-1}$. Donner la valeur de la variation d'entropie calculée précédemment pour : $T_0 = 300\ K, T_1 = 600\ K$

Exercice 3 : Cycle moteur de Beau de Rochas (7 pts)

On considère n moles d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1{,}35$ suivant un cycle suivant de transformations thermodynamiques réversibles :

- Compression isentropique (adiabatique réversible) de P_1, V_{max} à P_2, V_{min}
- Echauffement isochore de P_2, V_{min} à P_{max}, V_{min} au contact d'une source de chaleur
- Détente isentropique (adiabatique réversible) de P_{max}, V_{min} à P_4, V_{max}
- Refroidissement isochore de P_4, V_{max} à P_1, V_{max}

Ce cycle, appelé cycle de Beau de Rochas, se représente dans un diagramme dit de Watt, avec les variables d'état P, V, la température s'en déduisant.



Ce cycle est utilisé pour modéliser les transformations subies par un mélange air-essence depuis l'admission jusqu'à l'échappement. La chaleur Q_{23} échangée entre les points 2 et 3 de ce cycle représente la chaleur de combustion ou l'énergie potentielle chimique convertie en énergie d'agitation thermique au moment de l'explosion du mélange que l'on considère se produire de façon instantanée au point haut du piston lorsqu'une étincelle se produit dans la chambre de combustion. La transformation entre les points 3 et 4 est la phase qui fournit un travail moteur au piston, tandis que celle entre les points 1 et 3 exerce un travail résistant sur le piston chargé de comprimer le mélange. On définit une caractéristique du moteur, le coefficient de compression volumétrique :

$$\varepsilon = \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

et son rendement par :

$$\eta = \frac{travail\ fourni\ au\ piston}{chaleur\ de\ combustion} = \frac{|W|}{Q} = \frac{-W}{Q_{23}}$$

où W est le travail échangé par le gaz au cours d'un cycle et Q la chaleur de combustion, considérée comme échangée avec une source chaude entre les points 2 et 3

1) En utilisant le premier principe, exprimer W en fonction de Q_{23} et de Q_{41}
2) En déduire le rendement η en fonction de Q_{23} et Q_{41}
3) Exprimer Q_{23} en fonction de n, R, T_2, T_3 ainsi que Q_{41} en fonction de n, R, T_1, T_4
4) En déduire le rendement η en fonction de T_1, T_2, T_3, T_4
5) Exprimer T_2 en fonction de T_1, ε et γ puis T_4 en fonction de T_3, ε et γ
6) En déduire le rendement η en fonction de ε et γ

Exercice 4 : <u>Energie moyenne par particule (4 pts)</u>

On considère une mole de diazote à pression ambiante et à la température absolue T telle que le gaz puisse être considéré comme parfait. On admet que l'énergie interne thermique de ce gaz (liée à l'agitation moléculaire sans tenir compte des autres formes d'énergie (potentielle chimique, nucléaire) est donnée par la formule :

$$U = \frac{R\,T}{\gamma - 1}$$

1) Donner l'expression de l'énergie interne thermique du gaz, sachant que pour ce gaz, le rapport des capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant est :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$$

2) En déduire l'énergie moyenne par particule en fonction de T, $R = 8{,}314\ J\ K^{-1}\ mol^{-1}$ et le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}02 \times 10^{23}$
3) En supposant que cette énergie moyenne se répartit pour $3/5$ en énergie cinétique de translation et pour $2/5$ en énergie cinétique de rotation, déterminer la vitesse d'une molécule de diazote qui aurait cette énergie cinétique. Faire l'application numérique pour $T = 280\ K$

Données : Masse molaire du diazote : $M(N_2) = 28{,}0\ g\ mol^{-1}$

Correction

<u>Exercice 1</u> :

1) Une transformation sans échange de chaleur est une transformation adiabatique
2) Les transformations des gaz étant isentropiques, on a :

$$P_1\, {V_1}^{\gamma} = P_0\, {V_0}^{\gamma}$$

$$P_1\, {V_2}^{\gamma} = 2\, P_0\, {V_0}^{\gamma}$$

3) En faisant le quotient membre à membre des deux relations précédentes, on obtient :

$$\frac{{V_2}^{\gamma}}{{V_1}^{\gamma}} = 2$$

Soit, compte tenu de : $V_2 = 2\, V_0 - V_1$:

$$\left(\frac{2\, V_0 - V_1}{V_1}\right)^{\gamma} = 2$$

$$\frac{2\, V_0 - V_1}{V_1} = 2^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\frac{2\, V_0}{V_1} - 1 = 2^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\boxed{\frac{V_0}{V_1} = \frac{1 + 2^{\frac{1}{\gamma}}}{2}}$$

On en déduit :

$$\boxed{P_1 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma} = P_0 \left(\frac{1 + 2^{\frac{1}{\gamma}}}{2}\right)^{\gamma}}$$

4) <u>Application numérique</u> :

$$\left(\frac{1 + 2^{\frac{1}{\gamma}}}{2}\right)^{\gamma} \approx 1{,}32^{\gamma} \approx 1{,}47$$

Donc :

$$V_1 \approx \frac{V_0}{1{,}32} \approx 1{,}52\ L$$

$$V_2 = 2\,V_0 - V_1 \approx 2{,}48\,L$$

$$P_1 = 1{,}47\ atm$$

5) Les températures s'en déduisent en écrivant la conservation du nombre de moles :

$$\frac{P_1\,V_1}{T_1} = \frac{P_0\,V_0}{T_0}$$

Soit :

$$T_1 = T_0\ \frac{P_1}{P_0}\frac{V_1}{V_0} \approx 300\ \times \frac{1{,}47}{1} \times \frac{1}{1{,}32} \approx 334\ K$$

De même :

$$T_2 = T_0\ \frac{P_1}{2\,P_0}\frac{V_2}{V_0} \approx 300\ \times \frac{1{,}47}{2} \times \frac{2{,}48}{2} \approx 273\ K$$

<u>Exercice 2</u> :

1) Dans le système international d'unités, c_p est en $J\,K^{-1}\,kg^{-1}$ donc a est en $J\,K^{-1}\,kg^{-1}$ et b en $J\,K^{-2}\,kg^{-1}$
2) On a :

$$\boxed{\delta Q = T\ dS}$$

3) M désignant la masse d'une mole de gaz en kg :

$$\Delta S = \int_{T_0}^{T_1} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{M\ c_p\ dT}{T} = M \int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{a}{T} + b\right)\ dT = M[a\ Ln(T) + b\ T]_{T_0}^{T_1}$$

$$\boxed{\Delta S = M\left(a\ Ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) + b\ (T_1 - T_0)\right)}$$

4) Application numérique :

$$\Delta S = 28 \times 10^{-3}\left(1{,}04\ \times 10^{3}\ Ln\left(\frac{600}{300}\right) + 1{,}1\ \times 10^{-2}\ (600 - 300)\right) \approx 20{,}2\,J\,K^{-1}$$

<u>Exercice 3</u> :

1) La variation de l'énergie interne du gaz étant nulle sur un cycle de transformations, on a :

$$\boxed{W + Q_{23} + Q_{41} = 0}$$

2) On déduit le rendement

$$\eta = \frac{-W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

3) Au cours de la transformation isochore 2-3, le gaz ne reçoit aucun travail, seulement de la chaleur de la source chaude donc :

$$Q_{23} = \Delta U = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\,(T_3 - T_2)$$

Il en va de même pour la transformation isochore 4-1 :

$$Q_{41} = \Delta U = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\,(T_1 - T_4) = -\frac{n\,R}{\gamma - 1}\,(T_4 - T_1)$$

4) Il découle :

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

5) La compression 1-2 et la détente 3-4 étant des transformations adiabatiques réversibles donc isentropiques, on a :

$$T_2\,{V_{min}}^{\gamma-1} = T_1\,{V_{max}}^{\gamma-1}$$

$$T_4\,{V_{max}}^{\gamma-1} = T_3\,{V_{min}}^{\gamma-1}$$

d'où on tire :

$$T_2 = T_1\,\varepsilon^{\gamma-1}$$

$$T_4 = T_3\,\varepsilon^{1-\gamma}$$

6) Le rendement s'en déduit :

$$\eta = 1 - \frac{T_3\,\varepsilon^{1-\gamma} - T_1}{T_3 - T_1\,\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$$

Exercice 4 :

1) L'énergie interne thermique d'une mole de diazote est:

$$U = \frac{R\,T}{\frac{7}{5} - 1} = \frac{5}{2}\,R\,T$$

2) L’énergie moyenne par particule est alors :

$$\boxed{\frac{U}{\mathcal{N}} = \frac{5}{2}\,\frac{R}{\mathcal{N}}\,T}$$

3) Si m L est la masse d’une molécule de diazote et v sa vitesse, l’équation est :

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{3}{5}\times\frac{5}{2}\,\frac{R}{\mathcal{N}}\,T$$

soit :

$$v^2 = \frac{3\,R\,T}{m\,\mathcal{N}} = \frac{3\,R\,T}{M}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{3\,R\,T}{M}}}$$

Application numérique :

$$v \approx \sqrt{\frac{3\ \times 8{,}31 \times\ 280}{28 \times 10^{-3}}} \approx 500\ m\ s^{-1}$$