Devoir surveillé 1- AI2 – Electrostatique

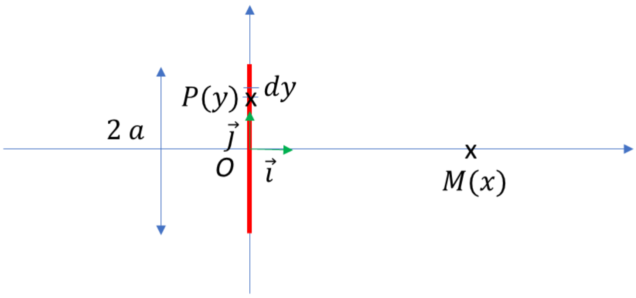
Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : Champ créé par un segment uniformément chargé (6 pts)

On considère un segment de longueur $2\ a$, portant une charge électrique uniforme de densité linéique λ. On rappelle que, si Q désigne la charge totale du segment, alors :

$$\lambda = \frac{Q}{2\ a}$$

On définit, dans un plan contenant le segment, un repère orthonormé comme suit : O est le milieu du segment, $\vec{\imath}$ est un vecteur directeur unitaire de la médiatrice du segment et $\vec{\jmath}$ son orthogonal direct.



1) Déterminer le potentiel électrostatique $dV(y)$ créé, en un point M d'abscisse x de l'axe (O, x), par une portion de conducteur de longueur dy prise en un point P du segment d'ordonnée y.

2) En déduire par intégration le potentiel électrostatique créé par le segment au point M. On rappelle que pour tout réel non nul b, la fonction :

$$f(x) = sh^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)$$

a pour dérivée :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + b^2}}$$

3) En déduire l'expression du champ électrostatique en M

4) Vérifier que pour x très grand, on retrouve bien les formules de potentiel et de champ associés à une charge ponctuelle Q placée en 0.

5) Montrer que le potentiel et le champ électrostatique ne peuvent pas être définis en O en calculant des limites.

Exercice 2 : Champ et potentiel (4 pts)

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on décrit un point de ce plan par ses coordonnées polaires (r, θ) :

$$r = OM, \qquad \theta = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$$

On rappelle que le repère local polaire $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est défini par :

$$\vec{u}_r = \frac{1}{r}\,\overrightarrow{OM}, \quad (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \frac{\pi}{2}$$

On rappelle que pour le champ électrostatique associé au potentiel $V(r,\theta)$, on a :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\,\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta$$

On considère un champ électrostatique de la forme :

$$\vec{E} = \frac{r+1}{r^2}\,e^{-r} cos(\theta)\,\vec{u}_r + \frac{e^{-r}}{r^2} sin(\theta)\,\vec{u}_\theta$$

1) Montrer que ce champ dérive d'un potentiel en cherchant directement l'expression de ce dernier par intégration d'un système aux dérivées partielles.

2) En déduire le travail du champ électrostatique sur le demi-cercle de centre O et de rayon $R > 0$ situé dans le demi plan $y > 0$

3) Déterminer les coordonnées de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ainsi que $cos(\theta), sin(\theta)$ et r en fonction des coordonnées cartésiennes x, y de M.

4) En déduire la décomposition du champ électrostatique dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en coordonnées cartésiennes.

<u>Problème</u> (10 points)

1) <u>Potentiel créé par un fil rectiligne infini (4 pts)</u>

On considère un fil rectiligne infini portant une charge électrique uniforme de densité linéique λ. On considère un point M de l'espace situé en dehors du fil à une distance r de ce dernier. Par symétrie, le champ électrostatique en M est radial sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}(M)$$

où $\vec{u}(M)$ est un vecteur unitaire.

a) Faire un schéma en perspective, faisant apparaitre le fil, le point M, le vecteur $\vec{E}(M)$, la ligne de champ passant par M et indiquer qu'elle est la surface équipotentielle passant par M.

b) Etablir, en utilisant le théorème de Gauss sur un cylindre de hauteur h de même axe que le fil et de rayon r, l'expression de $E(r)$

c) En déduire, en précisant la méthode employée et en détaillant les calculs qu'on peut donner au potentiel la forme :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0} Ln(r)$$

2) <u>Potentiel créé par deux fils rectilignes infinis parallèles (6 pts)</u>

On considère deux fils rectilignes infinis parallèles séparés d'une distance $2\,d$. Le premier fil porte une charge uniforme de densité linéique $\lambda_1 = \lambda > 0$ et le second une charge uniforme de densité linéique $\lambda_2 = -\lambda < 0$

a) En utilisant le résultat du 1) b déterminer le potentiel créé en un point M situé à une distance $r_1(M)$ du premier fil et une distance $r_2(M)$ du second fil et en déduire que les surfaces équipotentielles (surfaces de l'espace en lesquelles le potentiel a la même valeur) sont les surfaces d'équation :

$$\frac{r_2(M)}{r_1(M)} = k$$

où k est une constante arbitraire strictement positive, qu'on appellera paramètre associé à l'équipotentielle.

b) Justifier que les surfaces équipotentielles sont engendrées par des faisceaux de droite parallèles à l'axe des fils.

Il suffit donc, pour les déterminer, de considérer leur section par un plan perpendiculaire à l'axe des fils. Soit donc un tel plan $\mathcal{P}$, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, O étant le milieu des points d'intersection O_1 et O_2 des fils avec ce plan, $\vec{\imath}$ vecteur unitaire de même sens que $\overrightarrow{O_1O_2}$. Soit alors un point M du plan de coordonnées (x, y) distinct de O_1 et O_2.

c) Exprimer $r_1(M) = O_1M$ et $r_2(M) = O_2M$ en fonction de x, y et d.

d) En déduire la nature des courbes équipotentielles de $\mathcal{P}$ (On précisera les caractéristiques de ces courbes en fonction de k et d).

e) On note V_k la valeur du potentiel sur la courbe équipotentielle associée au paramètre k. Montrer que :

$$V_{\frac{1}{k}} = -V_k$$

f) Montrer que les courbes équipotentielles de paramètres k et $\frac{1}{k}$ sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[O_1O_2]$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Correction :

<u>Exercice</u> 1 :

1)

$$dV(y) = \frac{\lambda\, dy}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM} = \frac{\lambda\, dy}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{y^2 + x^2}}$$

2)

$$V(M) = \int_{-a}^{a} \frac{\lambda\, dy}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\sqrt{y^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[sh^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]_{-a}^{a} = \frac{\lambda}{4\,\pi\,\varepsilon_0} 2\, sh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\ sh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)$$

3) Par symétrie :

$$\vec{E}(M) = E(x)\,\vec{\imath}$$

Et ainsi :

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-\frac{a}{x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2+1}} = \frac{\lambda\,a}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,x\,\sqrt{a^2+x^2}}$$

4) en prenant des équivalents :

$$V(M) \sim \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{a}{x} = \frac{\lambda\,2\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,x} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,OM}$$

$$E(x) \sim \frac{\lambda\,2\,a}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,x\,x} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,OM^2}$$

5) Calculons les limites en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\ sh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\ sh^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) = -\infty$$

Le potentiel diverge donc en 0

$$\lim_{x\to 0^+} E(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} E(x) = -\infty$$

Le champ électrique aussi.

Exercice 2 :

1) On résout le système :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{r+1}{r^2}\ e^{-r}cos(\theta) \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = \dfrac{e^{-r}}{r^2}sin(\theta) \end{cases}$$

On commence par la seconde :

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{e^{-r}}{r}sin(\theta)$$

qui donne :

$$V(r,\theta) = \frac{e^{-r}}{r}cos(\theta) + f(r)$$

On la reporte dans la première :

$$-\left(\frac{-r-1}{r^2}\ e^{-r}cos(\theta)+\frac{df}{dr}\right)=\frac{r+1}{r^2}\ e^{-r}cos(\theta)$$

qui donne :

$$\frac{df}{dr}=0$$

Soit :

$$f(r)=cte$$

La constante peut être prise nulle, ce qui donne pour le potentiel :

$$V(r,\theta)=\frac{e^{-r}}{r}cos(\theta)$$

2) Le travail est égal à l'opposé de la variation du potentiel entre point de départ $A(r=R,\theta=0)$ et point d'arrivée $B(r=R,\theta=\pi)$ soit :

$$W=V(R,0)-V(R,\pi)=\frac{e^{-R}}{R}\big(cos(0)-cos(\pi)\big)=\frac{2\ e^{-R}}{R}$$

3)

$$\vec{u}_r=\frac{1}{r}\ \overrightarrow{OM}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (x\ \vec{\imath}+y\ \vec{\jmath})$$

$$\vec{u}_\theta=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (-y\ \vec{\imath}+x\ \vec{\jmath})$$

$$cos(\theta)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$sin(\theta)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

4)

$$\vec{E}(M)=\frac{r+1}{r^2}\ e^{-r}\frac{x}{r}\frac{1}{r}\ (x\ \vec{\imath}+y\ \vec{\jmath})+\frac{e^{-r}}{r^2}\frac{y}{r}\ \frac{1}{r}\ (-y\ \vec{\imath}+x\ \vec{\jmath})$$

$$=\frac{e^{-r}}{r^4}\ \Big(\big((r+1)\ x^2-y^2\big)\ \vec{\imath}+(r+1)x\ y\ \vec{\jmath}\Big)$$

$$=\frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}\ \left(\left(\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)\ x^2-y^2\right)\ \vec{\imath}+\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)x\ y\ \vec{\jmath}\right)$$

<u>Problème</u>

1)

a)

b)

Désignons par $\vec{n}$ la normale sortante à une des surfaces formant un cylindre de même axe que le fil de rayon r et de hauteur h, par Σ^+ la base supérieure, Σ^- la base inférieure et Σ^L la surface latérale.

Sur Σ^+ et Σ^- le champ électrique est dans le plan de la surface donc la contribution au flux sortant du cylindre de ce champ à travers les surfaces Σ^+ et Σ^- est nulle.

Sur Σ^L le champ est colinéaire et de même sens que la normale et constant en norme sur toute la surface. La contribution au flux sortant est donc :

$$\Phi = E(r) \times 2\,\pi\, r\, h$$

Or le cylindre enferme la charge :

$$Q = \lambda\, h$$

D'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\, r}}$$

c) Le potentiel ne dépendant que de r, on a :

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0\, r}$$

Soit, par intégration :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\, Ln(r)$$

2)

a) Le potentiel est la somme des potentiels créés par chacun des fils, soit :

$$\begin{aligned} V(M) &= -\frac{\lambda_1}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\, Ln(r_1(M)) - \frac{\lambda_2}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\, Ln(r_2(M)) \\ &= -\frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\, Ln(r_1(M)) + \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\, Ln(r_2(M)) \\ &= \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\, Ln\left(\frac{r_2(M)}{r_1(M)}\right) \end{aligned}$$

Les surfaces équipotentielles sont définies comme étant les surfaces telles que $V(M)$ soit constant, donc telles que la quantité sous le logarithme soit une constante strictement positive dans l'expression précédente. Elles sont donc définies par :

$$\frac{r_2(M)}{r_1(M)} = k$$

où $k > 0$.

b) Pour tout point M d'une équipotentielle, les points M' de la droite D passant par M parallèle aux deux fils vérifient :

$$\frac{r_2(M')}{r_1(M')} = \frac{r_2(M)}{r_1(M)}$$

Donc :

$$V(M') = V(M)$$

La droite D est donc contenue dans la surface équipotentielle. Cette dernière est donc composée d'un faisceau de droites parallèles.

c)

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} = d\,\vec{\imath} + x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = (x+d)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

$$r_1(M) = O_1M = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

$$\overrightarrow{O_2M} = \overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OM} = -d\,\vec{\imath} + x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = (x-d)\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

$$r_2(M) = O_2M = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

d) Les courbes équipotentielles sont les courbes d'équation

$$\frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} = k^2$$

Soit :

$$(x-d)^2 + y^2 = k^2((x+d)^2 + y^2)$$

$$x^2 - 2\,d\,x + d^2 + y^2 = k^2(x^2 + 2\,d\,x + d^2 + y^2)$$

$$(1-k^2)\,(x^2+y^2) - 2\,d\,(1+k^2)\,x + (1-k^2)\,d^2 = 0$$

Distinguons 2 cas :

1er cas : $k = 1$

L'équipotentielle est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$

2ème cas : $0 < k < 1$ ou $k > 1$

L'équation devient :

$$x^2 + y^2 - 2\,d\,\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)\,x + d^2 = 0$$

Soit , en posant :

$$a_k = \frac{1+k^2}{1-k^2}$$

$$x^2 + y^2 - 2\,d\,a_k\,x + d^2 = 0$$

$$(x - d\,a_k)^2 + y^2 + d^2(1 - {a_k}^2) = 0$$

$$(x - d\,a_k)^2 + y^2 = d^2({a_k}^2 - 1)$$

Or :

$$a_k{}^2 - 1 = (a_k - 1)\,(a_k + 1) = \frac{2\,k^2}{1-k^2}\,\frac{2}{1-k^2} = \frac{4\,k^2}{(1-k^2)^2} = \left(\frac{2\,k}{1-k^2}\right)^2$$

D'où l'équation :

$$(x - d\,a_k)^2 + y^2 = \left(\frac{2\,k}{1-k^2}\right)^2$$

L'équipotentielle de paramètre k est donc le cercle de centre Ω_k $(d\,a_k, 0)$ et de rayon :

$$\mathrm{R}_k = \left|\frac{2\,k}{1-k^2}\right|$$

Etudions sur $]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$ la fonction homographique :

$$g(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$g'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Par ailleurs :

$$g(0) = 1, \qquad \lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty, \lim_{x\to 1^+} g(x) = -\infty, \lim_{x\to +\infty} g(x) = -1$$

On en déduit que l'abscisse $d\,a_k$ de Ω_k sur l'axe $(O,\vec{\imath})$ croît de d^+ à $+\infty$ et le rayon croît de 0^+à $+\infty$ quand k croît de 0^+ à 1^- tandis que et l'abscisse croît de $-\infty$ à $-d^-$ et le rayon décroît de $+\infty$ à 0^+quand k croît de 1^+ à $+\infty$.

e)

$$V_k = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,Ln(k)$$

$$V_{\frac{1}{k}} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,Ln\left(\frac{1}{k}\right) = -V_k$$

f) Notons $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{k}}$ les courbes équipotentielles de paramètres respectifs k et $\frac{1}{k}$.

$$d\,a_{\frac{1}{k}} = \frac{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2} = d\,\frac{k^2+1}{k^2-1} = -d\,a_k$$

Les centres des cercles $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{k}}$ sont donc symétriques par rapport à O.

$$\mathrm{R}_{\frac{1}{k}} = \left|\frac{2\,\frac{1}{k}}{1-\left(\frac{1}{k}\right)^2}\right| = \left|\frac{2\,k}{k^2-1}\right| = \mathrm{R}_k$$

Les cercles $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{\frac{1}{k}}$ ont donc même rayons. Ils sont donc symétriques par rapport à la médiatrice de $[O_1O_2]$