Devoir sur Table AI2 – Mars 2020

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : **Calcul de potentiel associé à un champ de vecteurs (5 pts)**

On considère, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le champ de force :

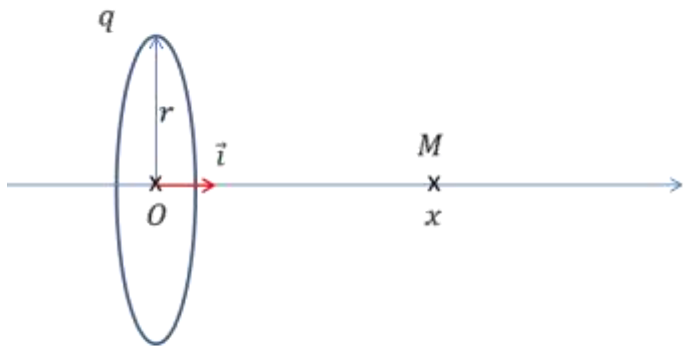
$$\vec{F} = \left(y\,z\,cos(x) - y\,e^{-z^2}\right)\vec{\imath} + \left(z\,sin(x) - x\,e^{-z^2}\right)\vec{\jmath} + \left(y\,sin(x) + 2\,x\,y\,z\,e^{-z^2}\right)\vec{k}$$

1) Vérifier que ce champ dérive bien d'un potentiel $V(x,y,z)$ tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(V)$ (1,5 pt)
2) Déterminer ce potentiel (à une constante près) (1,5 pt)
3) Calculer le travail de $\vec{F}$ entre les points $O(0,0,0)$ et $A(1,1,1)$ (1 pt)
4) Calculer la divergence de ce champ (1 pt)

Exercice 2 : **Champ électrostatique créé par un cercle chargé (10 pts)**

On donne la formule du potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge q, en un point M situé à une abscisse x sur son axe de symétrie muni d'un repère $(O,\vec{\imath})$ comme représenté sur la figure qui suit.

$$V(x) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$



Pour les applications numériques on prendra :, $r = 1\,cm$, $q = 1\,nC = 10^{-9}\,C$

Pour un proton : masse : $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,kg$ charge : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,C$

Constante de l'interaction électrostatique :

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$$

1) Justifier que le champ électrostatique créé par le cercle au point M d'abscisse x de l'axe $(O, \vec{\imath})$ est colinéaire au vecteur $\vec{\imath}$. En posant ce dernier sous la forme $\vec{E}(x) = E(x)\,\vec{\imath}$ déterminer $E(x)$. (2 points)
2) Calculer $E(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x)$ (1 point)
3) Donner le signe de $E(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$. En déduire que la fonction $E(x)$ présente un maximum sur $[0, +\infty[$ puis en dérivant $E(x)$ montrer que ce maximum est atteint à l'abscisse :
$$x_{max} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$
Déterminer une expression littérale de ce maximum puis faire l'application numérique (2,5 points)
4) On a représenté sur le graphique de l'annexe, le potentiel $V(x)$. Expliquer comment on aurait pu déterminer le maximum de $E(x)$ et l'abscisse où il est atteint à partir de ce graphique et donc sans faire de calculs. On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction utilisés dans la démarche (1,5 pt)
5) Un proton se trouve sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ au point A d'abscisse $x_A = 10\ cm$ à un instant initial et avec un vecteur vitesse $\vec{v} = -v\,\vec{\imath}$ où $v > 0$.
   - Calculer l'intensité de la force électrostatique $\vec{F}$ exercée par le cercle sur le proton lorsque ce dernier est en A et la comparer à l'intensité du poids du proton. Commenter (1,5 pt)
   - Y a-t-il une valeur de v minimale telle que le proton puisse traverser le cercle. Si oui la calculer (1,5 pt)

Exercice 3 <u>Condensateur cylindrique (5 points)</u>

Un condensateur est constitué de deux armatures cylindriques de même axe, de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$ et séparées par de l'air. On fera l'hypothèse que l'armature interne porte une charge uniformément répartie Q et l'armature externe la charge $-Q$ également uniformément répartie et que le champ créé entre les deux armatures est le même (pas trop près des bords) que celui qui serait créé par deux cylindres de hauteur infinie uniformément chargés et portant tous deux des charges globales opposées.

1) En utilisant le théorème de Gauss sur une surface fermée convenablement choisie (faire un dessin), établir le champ électrique en un point M situé à une distance r de l'axe des cylindres
2) Que peut-on dire pour deux points d'une même armature vis-à-vis du potentiel électrostatique en ces points ?
3) Qu'appelle t'on tension du condensateur ?
4) Calculer par intégration sur un chemin convenablement choisi (préciser sur un schéma), la différence de potentiel entre un point A de l'armature interne et un point B de l'armature externe et en déduire la capacité du condensateur en fonction de R_1 et R_2

Correction

Exercice 1

1) Vérifions les conditions de Schwarz :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(y\, z\, cos(x) - y\, e^{-z^2}\right)}{\partial y} = z\, cos(x) - \; e^{-z^2}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(z\, sin(x) - x\, e^{-z^2}\right)}{\partial x} = z\, cos(x) - \; e^{-z^2} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial\left(y\, z\, cos(x) - y\, e^{-z^2}\right)}{\partial z} = y\, cos(x) - 2\, y\, z\, e^{-z^2}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial\left(y\, sin(x) + 2\, x\, y\, z\, e^{-z^2}\right)}{\partial x} = y\, cos(x) - 2\, y\, z\, e^{-z^2} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial\left(z\, sin(x) - x\, e^{-z^2}\right)}{\partial z} = sin(x) - 2\, x\, z\, e^{-z^2}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial\left(y\, sin(x) + 2\, x\, y\, z\, e^{-z^2}\right)}{\partial y} = sin(x) - 2\, x\, z\, e^{-z^2} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

2) Intégrons ;

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x = -y\, z\, cos(x) + y\, e^{-z^2}$$

$$V = -y\, z\, sin(x) + x\, y\, e^{-z^2} + f(y,z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_y = -z\, sin(x) + x\, e^{-z^2}$$

il vient :

$$-z\, sin(x) + x\, e^{-z^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = -z\, sin(x) + x\, e^{-z^2}$$

soit :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

donc :

$$f(y,z) = g(z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_z = -y\, sin(x) - 2\, x\, y\, z\, e^{-z^2}$$

il vient :

$$-y\, sin(x) - 2\, x\, y\, z\, e^{-z^2} + \frac{dg}{dz} = -y\, sin(x) - 2\, x\, y\, z\, e^{-z^2}$$

soit :

$$\frac{dg}{dz} = 0$$

donc :

$$g(z) = Cte = C$$

finalement :

$$V = -y\, z\, sin(x) + x\, y\, e^{-z^2} + C$$

3) on a :

$$W = V(O) - V(A) = 0 + C - (-sin(1) + e^{-1} + C) = sin(1) - e^{-1}$$

4) On a :

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\left(y\, z\, cos(x) - y\, e^{-z^2}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(z\, sin(x) - x\, e^{-z^2}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(y\, sin(x) + 2\, x\, y\, z\, e^{-z^2}\right)}{\partial z}$$

$$= -y\, z\, sin(x) + (2\, x\, y\, - 4\, x\, y\, z^2)\, e^{-z^2}$$

Exercice 2

1) La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe du cercle donc le vecteur champ électrostatique est porté par cet axe.

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \left(-\frac{3}{2}\right)(2\,x)(r^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2) On a :

$$E(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} E(x) = 0$$

3) on a $E(x) > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$ et compte tenu du caractère continu de $E(x)$ et de ce qui précède, $E(x)$ admet un maximum sur $]0, +\infty[$. Pour le déterminer on dérive la fonction :

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \left((r^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\,x\,(2\,x)\,(r^2 + x^2)^{-\frac{5}{2}}\right) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\,x^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{r^2 + x^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\,x^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{r^2 - 2\,x^2}{(r^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

La dérivée s'annulant au maximum, nous avons :

$$r^2 - 2\,x^2 = 0$$

Soit :

$$x_{max} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$E(x_{max}) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{\left(r^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\,\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{r}{\left(r^2 + \frac{r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\,\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{r}{r^3\,\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{q}{4\,\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r^2\,\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\,\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\,\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{r^2} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{2}{3\,\sqrt{3}\,r^2}$$

Application numérique

$$x_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\ cm$$

$$E(x_{max}) = 9 \times 10^9 \times 10^{-9}\ \times \frac{2}{3\,\sqrt{3}\,10^{-4}} = \frac{6 \times 10^4}{\sqrt{3}} = 2\,\sqrt{3} \times 10^4 \approx 3{,}4\ \times 10^4\ N\,C^{-1}$$

4) On peut déterminer le maximum de $E(x)$ en identifiant le point de la courbe de potentiel où la pente est maximale. En évaluant graphiquement le coefficient directeur de cette pente et en le changeant de signe on obtient $E(x_{max})$

5) La force électrostatique a pour expression :

$$\vec{F} = e\,E(x)\,\vec{\imath}$$

Donc :

$$\|\vec{F}\| = \frac{e\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Soit en A :

$$\|\vec{F}\| = 1{,}6 \times 10^{-19} \times\ 3{,}4\ \times 10^4\ = 5{,}4 \times 10^{-15} N$$

Poids du proton :

$$\|\vec{P}\| = m\,g = 1{,}67 \times 10^{-27} \times 10 = 1{,}67 \times 10^{-26}\ N$$

Donc le poids du proton est négligeable devant la force électrostatique

Pour la vitesse minimale, le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre le point A et le point O s'écrit :

$$0 - \frac{1}{2} m\,v^2 = e\,V(A) - e\,V(O) = \frac{e\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 + {x_A}^2}} - \frac{e\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}$$

D'où :

$$v = \sqrt{\frac{2\,e\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,m}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + {x_A}^2}}\right)}$$

Numériquement :

$$v = \sqrt{\frac{2\ \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^9 \times\ 10^{-9}}{1{,}67 \times 10^{-27}}\left(\frac{1}{10^{-2}} - \frac{1}{\sqrt{10^{-4} + 10^{-2}}}\right)} = 1{,}3 \times 10^5\ m\,s^{-1}$$

Exercice 3

1) On prend un cylindre de hauteur égale à la hauteur des deux armatures cylindriques (en fait de hauteur un peu inférieure pour être un peu éloigné des bords) de même axe que les deux armatures et de rayon r tel que : $R_1 < r < R_2$. Par symétrie radiale, le champ à la surface de ce cylindre a même intensité en tout point et en désignant par $\vec{n}$ la normale sortante en un point M, on a :

$$\vec{E} = E(r)\vec{n}$$

Le flux sortant de $\vec{E}$ à travers la surface du cylindre se résume au flux sur la surface latérale de valeur :

$$\Phi = 2\,\pi\,r\,h\,E(r)$$

Or d'après le théorème de Gauss :

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,r\,h}}$$

2) Une armature est une surface équipotentielle, donc le potentiel en deux points distincts a même valeur
3) La tension du condensateur est la différence de potentiel entre un point quelconque de l'armature positive et un point quelconque de l'armature négative
4) On choisi pour chemin d'intégration un morceau de rayon entre un point A de l'armature positive et un point B de l'armature négative et on a :

$$V_A - V_B = \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,h}\,[Ln(r)]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,h}\,Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On en déduit la capacité du condensateur :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{2\,\pi\,\varepsilon_0\,h}{Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$