Devoir sur Table AI2 – 22 Mars 2018

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : Calcul de potentiel associé à un champ de vecteurs (5 pts)

On considère, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ le champ de force :

$$\vec{F} = \left(e^{-x} + sin(y\,z)\right)\vec{\imath} + \left(x\,z\,cos(y\,z)\right)\vec{\jmath} + \left(x\,y\,cos(y\,z)\right)\vec{k}$$

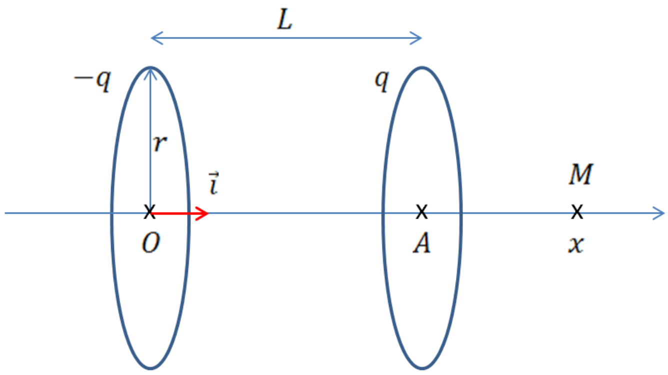
1) Vérifier que ce champ dérive bien d'un potentiel $V(x,y,z)$ tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(V)$ (1,5 pt)
2) Déterminer ce potentiel (à une constante près) (1,5 pt)
3) Calculer le travail de $\vec{F}$ entre les points $O(0,0,0)$ et $A(1,1,1)$ (1 pt)
4) Calculer la divergence de ce champ (1 pt)

Exercice 2 : Calcul du champ électrostatique créé par deux cercles chargés (10 pts)

On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* de son centre, sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On considère deux cercles uniformément chargés, le premier portant une charge $q_1 = -q < 0$ et le second une charge $q_2 = q > 0$. Tous deux sont placés à une distance L de telle sorte que $(O,\vec{\imath})$ soit leur axe commun de révolution et que O soit le centre du premier (voir schéma) .



Pour les applications numériques on prendra : $L = 5\ cm,\ \ r = 1\ cm,\ \ q = 1\ nC = 10^{-9}\ C$

Pour un électron : masse : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg$ charge : $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C$

Coonstante de l'interaction électrostatique :

$$\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$$

1) Rappeler la formule de la capacité d'un condensateur plan dont les armatures ont une surface S et sont séparées d'une distance b par de l'air assimilé à du vide. En déduire la tension U qu'il faudrait appliquer à un tel condensateur pour que son armature positive porte la charge q donnée précédemment dans l'énoncé. Pour l'application numérique, on prendra : $b = 1\ mm, S = 10\ cm^2$ et on pourra se contenter d'une puissance de 10 pour la capacité (2 pts).

2) Donner en fonction des paramètres $q, r, L, \varepsilon_0, x$ l'expression du potentiel électrostatique $V_1(x)$ crée par le premier cercle en un point M d'abscisse x situé sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ puis celle du potentiel $V_2(x)$ crée par le second cercle en ce même point et en déduire l'expression du potentiel total $V(x)$ créé en M (1,5 pts)

3) A l'aide d'un développement limité ou en transformant à l'aide d'une quantité conjuguée, donner un équivalent de $V(x)$ quand x tend vers $+\infty$ (1 pt)

4) Justifier que le champ électrostatique créé par les deux cercles en un point de l'axe $(O, \vec{\imath})$ est colinéaire au vecteur $\vec{\imath}$. En posant ce dernier sous la forme $\vec{E}(x) = E(x)\,\vec{\imath}$ déterminer $E(x)$ en un point M d'abscisse x de l'axe en fonction des paramètres définis au 1) (1,5 pt)

5) Calculer $E(0)$ et $E(L)$ et comparer les. Etait-ce prévisible ? (1 pt)

6) On a représenté sur le graphique de l'annexe, le potentiel $V(x)$. Il apparait que ce potentiel présente un maximum quasiment en $x = L$. En se servant du graphique, justifier que le champ électrique peut être considéré comme constant pour $0 \leq x \leq L$ puis donner en une expression approchée en fonction des paramètres et faire l'application numérique (1,5 pt)

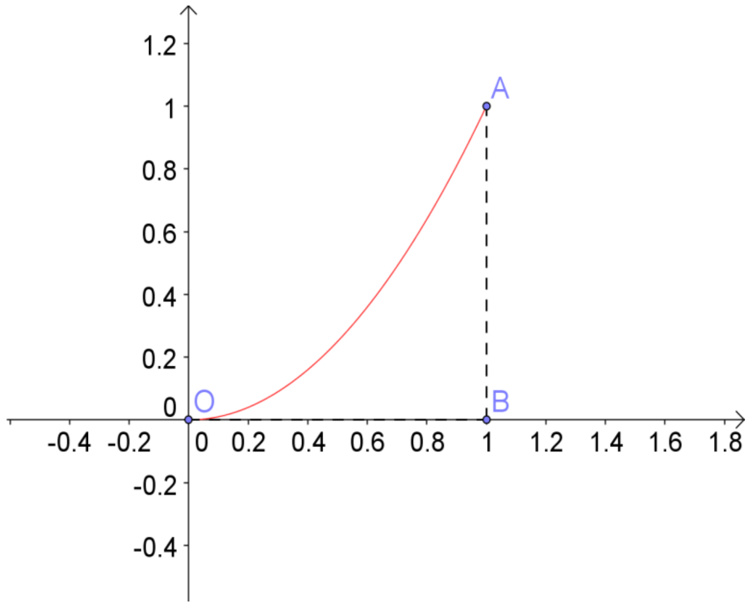
7) Un électron se trouve en O à un instant initial et sans vitesse initiale. L'électron mis en mouvement par le champ électrostatique créé par les deux cercles se déplace alors sur l'axe $(O, \vec{\imath})$. Préciser sur un schéma dans quel sens. Justifier à l'aide de la courbe de l'annexe, que la vitesse de l'électron ne pourra jamais s'annuler donc changer de sens puis, en appliquant le théorème de l'énergie cinétique en mécanique classique, exprimer la vitesse limite atteinte par l'électron (c'est-à-dire lorsqu'il devient hors de portée du champ) en fonction des paramètres. La valeur trouvée de la vitesse justifie t'elle de faire un emploi de la mécanique classique ? (1,5 pt)

Exercice 3 circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe

Théorème d'Ostrogradski (7 pts)

On considère, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ le champ de force défini par

$$\vec{F} = x\ \sin(y)\ \vec{\imath} + \ e^{-y}\,\vec{\jmath} + 4\,\vec{k}$$



On donne les points : $O(0{,}0{,}0),\ A(1{,}1{,}0),\ B(1{,}0{,}0)$

1) Calculer le travail de cette force le long de la courbe Γ_1 formée par la portion de la parabole située dans le plan $z = 0$ et d'équation $y = x^2$ et en allant de O à A (1,5 pt)
2) Calculer le travail de cette même force le long de la courbe Γ_2 formée des segments $[OB]$ et $[BA]$ (1,5 pt)
3) Ce travail est il le même pour les deux chemins ? $\vec{F}$ peut-il être un champ électrostatique ? Justifier puis indiquer par quel autre moyen on aurait pu le vérifier (1 pt)
4) **Calcul intégral (3 pts dont 2 bonus) :**

On considère le cube défini par le système d'inéquations :

$$0 \leq x \leq 1\,, 0 \leq y \leq 1\,, 0 \leq z \leq 1$$

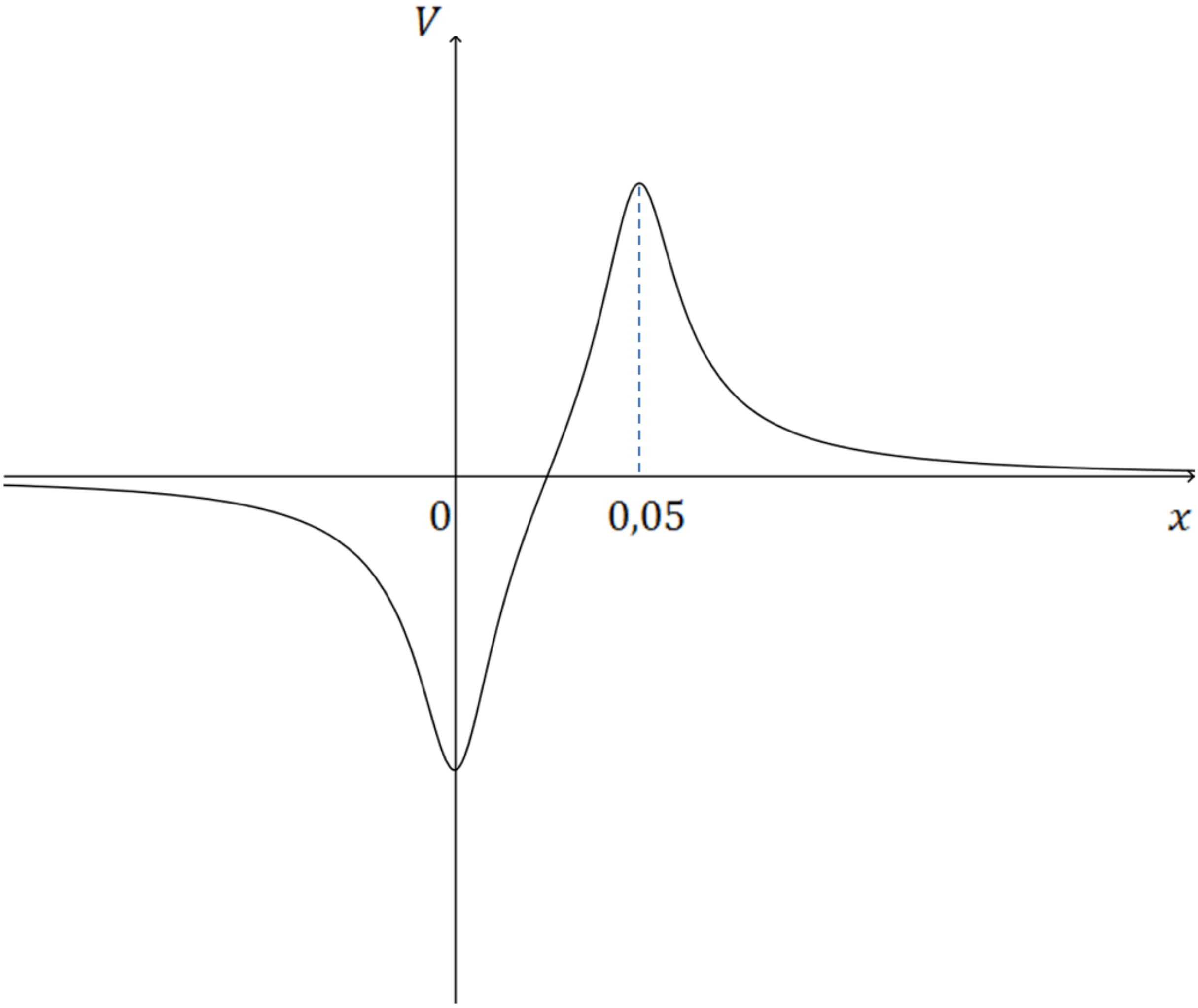
Calculer :

$$\iiint_{cube} div\left(\vec{F}\right)\, dx\, dy\, dz$$

- directement

- en utilisant le théorème d'Ostrogradski

Annexe de l’exercice 2



Correction

Exercice 1

1) Vérifions les conditions de Schwarz :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^{-x} + sin(y\,z)\right)}{\partial y} = z\,cos(y\,z)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial\left(x\,z\,cos(y\,z)\right)}{\partial x} = z\,cos(y\,z) = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial\left(e^{-x} + sin(y\,z)\right)}{\partial z} = y\,cos(y\,z)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial\left(x\,y\,cos(y\,z)\right)}{\partial x} = y\,cos(y\,z) = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial\left(x\,z\,cos(y\,z)\right)}{\partial z} = x\,cos(y\,z) - x\,y\,z\,sin(y\,z)$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial\left(x\,y\,cos(y\,z)\right)}{\partial y} = x\,cos(y\,z) - x\,y\,z\,sin(y\,z) = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

2) Intégrons ;

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x = -e^{-x} - sin(y\,z)$$

$$V = e^{-x} - x\,sin(y\,z) + f(y,z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_y = -x\,z\,cos(y\,z)$$

il vient :

$$-x\,z\,cos(y\,z) + \frac{\partial f}{\partial y} = -x\,z\,cos(y\,z)$$

soit :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

donc :

$$f(y,z) = g(z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_z = -x\ y\ cos(y\ z)$$

il vient :

$$-x\ y\ cos(y\ z) + \frac{dg}{dz} = -x\ y\ cos(y\ z)$$

soit :

$$\frac{dg}{dz} = 0$$

donc :

$$g(z) = Cte = C$$

finalement :

$$V = e^{-x} - x\ sin(y\ z) + C$$

3) on a :

$$W = V(O) - V(A) = 1 + C - (e^{-1} - sin(1) + C) = 1 - e^{-1} + sin(1)$$

4) On a :

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial\left(e^{-x} + sin(y\ z)\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(x\ z\ cos(y\ z)\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(x\ y\ cos(y\ z)\right)}{\partial z}$$

$$= -e^{-x} - x\ z^2\ sin(y\ z) - x\ y^2\ sin(y\ z)$$

Exercice 2 :

1) La capacité du condensateur est :

$$C = \frac{\varepsilon_0\, S}{b} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\, S}{4\,\pi\, b} = \frac{10^{-3}}{9\times 10^{9}\times 10^{-3}} \approx 10^{-10}\,F$$

La tension qui donnerait la charge q est :

$$U = \frac{q}{C} = \frac{10^{-9}}{10^{-10}} = 10\,V$$

2) On a :

$$V_1(x) = \frac{-q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\times\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

$$V_2(x) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\times\frac{1}{\sqrt{r^2+(x-L)^2}}$$

$$V(x) = V_1(x)+V_2(x) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(x-L)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)$$

3) On a :

$$V(x) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{\sqrt{r^2+x^2}-\sqrt{r^2+(x-L)^2}}{\sqrt{r^2+(x-L)^2}\,\sqrt{r^2+x^2}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{(r^2+x^2)-(r^2+(x-L)^2)}{\sqrt{r^2+(x-L)^2}\,\sqrt{r^2+x^2}\left(\sqrt{r^2+x^2}+\sqrt{r^2+(x-L)^2}\right)}\right)$$

Soit en $+\infty$

$$V(x) \approx \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{L\,(2\,x-L)}{x\,x\,(x+x)} \approx \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{L}{x^2}$$

4) Par symétrie de révolution d'axe $(O,\vec{\imath})$ le champ $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{\imath}$ et :

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-\frac{2\,(x-L)\left(-\frac{1}{2}\right)}{(r^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2\,x\left(-\frac{1}{2}\right)}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{(x-L)}{(r^2+(x-L)^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

5) On a :

$$E(0) = E(L) = -\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{L}{(r^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}$$

En 0 le champ n'est dû qu'au second cercle et en L qu'au premier.

6) Le graphique montre que la dérivée du potentiel $V(x)$ est quasiment constante pour $0 \leq x \leq L$. Le champ $E(x)$ est donc constant et peut être approché par :

$$E(x) = \frac{V(0) - V(L)}{L} = \frac{2\,V(0)}{L}$$

où :

$$V(0) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} - \frac{1}{r}\right)$$

Numériquement :

$$V(0) = 9 \times 10^9 \times 10^{-9}\left(\frac{1}{\sqrt{0{,}01^2 + 0{,}05^2}} - \frac{1}{0{,}01}\right) \approx -723{,}5\,V$$

$$E(x) = \frac{2 \times (-723{,}5)}{0{,}05} \approx 29\,kV\,m^{-1}$$

7) Supposons que la vitesse de l'électron s'annule en un point d'abscisse $x > 0$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre le point O et ce point, on aurait, compte tenu d'une variation nulle d'énergie cinétique, une variation nulle d'énergie potentielle, ce qui n'est pas le cas d'après le graphique. Le même théorème appliqué entre O et un point de l'axe suffisamment éloigné pour pouvoir considérer le potentiel comme nul donne :

$$\frac{1}{2}m\,v_{lim}^2 = -e\,V(0)$$

soit :

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{-2\,e}{m}\,V(0)} =$$

numériquement :

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{-2\ \times 1{,}6 \times 10^{\,-19} \times (-723{,}5)}{9{,}1 \times 10^{-31}}} \approx 5{,}04 \times 10^6\,m\,s^{-1}$$

Faisons le quotient de cette vitesse par celle de la lumière :

$$\frac{v_{lim}}{c} = \frac{5{,}04 \times 10^6}{3{,}00 \times 10^8} \approx 10^{-2}$$

L'électron peut être considéré en mécanique non relativiste

Exercice 3

1) Le travail est :

$$\int_{\Gamma_1:O\to A} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \int_{\Gamma_1:O\to A} x\ sin(y)\ dx + e^{-y}\,dy + 4\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{1} x\ sin(x^2)\ dx + e^{-x^2}\ (2\,x\,dx)$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x\ sin(x^2) + 2\,x\,e^{-x^2}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}cos(x^2) - e^{-x^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}cos(1) - e^{-1}$$

2) Le travail est :

$$\int_{\Gamma_2:O\to A} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = \int_{\Gamma_2:O\to B} x\ sin(y)\ dx + \int_{\Gamma_2:B\to A} e^{-y}\ dy$$

$$= \int_{y=0}^{1} e^{-y}\ dy$$

$$= [-e^{-y}]_0^1$$

$$= 1 - e^{-1}$$

3) Ce travail n'est pas égal au précédent donc le travail de $\vec{F}$ dépend du chemin suivi. $\vec{F}$ ne dérive donc pas d'un potentiel et ne peut pas être de ce fait un champ électrostatique. Ce point aurait pu être observé en constatant que les conditions de Schwarz ne sont pas satisfaites.
4) Commençons par calculer la divergence :

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial(x\ sin(y))}{\partial x} + \frac{\partial(e^{-y})}{\partial y} + \frac{\partial(4)}{\partial z} = sin(y) - e^{-y}$$

calcul direct :

$$\iiint_{cube} div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \int_{y=0}^{1} (sin(y) - e^{-y})\ dy = [-cos(y) + e^{-y}]_0^1 = e^{-1} - cos(1)$$

en utilisant le théorème d'Ostrogradski :

$$\iiint_{cube} div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \Phi_{\Sigma^+}(\vec{F})$$

où $\Phi_{\Sigma^+}(\vec{F})$ désigne le flux sortant de $\vec{F}$ à travers la surface du cube.

$$\Phi_{\Sigma^+}(\vec{F}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{\imath}\ dS + \iint_{\Sigma'_1} \vec{F} \cdot (-\vec{\imath})\ dS + \iint_{\Sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{\jmath}\ dS + \iint_{\Sigma'_2} \vec{F} \cdot (-\vec{\jmath})\ dS$$

$$+ \iint_{\Sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{k}\ dS + \iint_{\Sigma'_3} \vec{F} \cdot (-\vec{k})\ dS$$

$$= \iint_{\Sigma_1} x\ sin(y)\ dy\, dz\ - \iint_{\Sigma'_1} x\ sin(y)\ dy\, dz\ + \iint_{\Sigma_2} e^{-y}\, dx\, dz - \iint_{\Sigma'_2} e^{-y}\, dx\, dz$$

$$+ \iint_{\Sigma_3} 4\ dS - \iint_{\Sigma'_3} 4\ dS$$

$$= \iint_{\Sigma_1} sin(y)\ dy\, dz\ + \iint_{\Sigma_2} e^{-1}\, dx\, dz - \iint_{\Sigma'_2} dx\, dz$$

$$= \int_{y=0}^{1} sin(y)\ dy + e^{-1} - 1 = 1 - cos(1) + e^{-1} - 1 = e^{-1} - cos(1)$$

Nous retrouvons bien la même valeur par les deux méthodes