Devoir sur Table – 17 Mars 2018

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : **Calcul de potentiel électrostatique et de tension (6 pts)**

On considère, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le champ de vecteur :

$$\vec{E} = (x^3 + 3\,x\,y^2)\,\vec{\imath} + (3\,x^2\,y + \,y^3)\,\vec{\jmath}$$

1) Vérifier que ce champ dérive bien d'un potentiel $V(x, y, z)$ (1,5 pt)
2) Déterminer ce potentiel (à une constante près) (2 pt)
3) Calculer la tension U_{AB} entre les points $A(1,1,1)$ et $B(2,3,4)$ (1 pt)
4) Une masse ponctuelle $m = 100\ g$ portant une charge de 0,1 C étant initialement immobile en A est mise en mouvement de telle sorte que seule la force électrostatique travaille. Calculer le travail de cette force entre A et B puis en déduire la vitesse de l'électron en B en appliquant le théorème de l'énergie cinétique. (1,5 pt)

Exercice 2 : **Calcul du champ électrostatique créé par un cylindre (8 pts)**

On rappelle pour cet exercice le résultat suivant :

Pour $b > 0$ la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b}}$$

admet pour primitive :

$$F(x) = Ln\left(x - a + \sqrt{(x-a)^2 + b}\right)$$

On considère alors un cylindre de hauteur $L = 2\ b$ et de rayon R. Ce système est chargé en surface avec la densité uniforme :

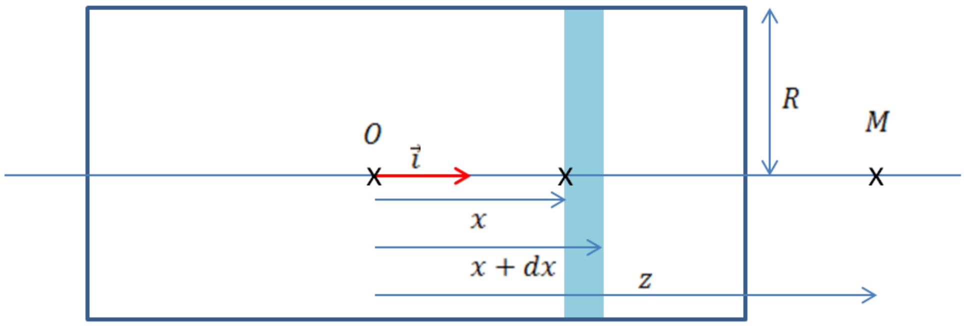
$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Où Q est la charge totale portée par le cylindre et S la surface latérale du cylindre.

On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On peut alors diviser le cylindre en surfaces élémentaires, en considérant des cercles repérés par l'abscisse x de leur centre sur l'axe $(O, \vec{\imath})$ du cylindre tel que défini par la figure ci-dessous :



1) Déterminer l'aire d^1S de la surface élémentaire située entre les abscisses x et $x + dx$ en fonction de R et dx (1 pt)
2) En déduire la charge $d^1q = \sigma\, d^1S$ portée par la surface élémentaire en fonction de $Q, b,$ et dx (1 pt)
3) Calculer le potentiel électrostatique $d^1V(x)$ créé par la surface élémentaire en un point M d'abscisse z de l'axe du cylindre (1 pt)
4) En déduire par calcul intégral l'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ créé par le cylindre au point M d'abscisse z de l'axe en fonction de $Q, b, R, \varepsilon_0, z$ (1 pt)
5) En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ en un point M d'abscisse z de l'axe en fonction de $Q, b, R, \varepsilon_0, z$ et vérifier que $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$ (1,5 pt)
6) Vérifier que le champ électrostatique tend vers celui donné par une charge ponctuelle Q placée en O lorsque z tend vers l'infini. (1,5 pt)

Exercice 3 (6 pts)

On reprend, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le champ de vecteur de l'exercice 1

$$\vec{E} = (x^3 + 3\,x\,y^2)\,\vec{\imath} + (3\,x^2\,y + \,y^3)\,\vec{\jmath}$$

1) Calculer la divergence de ce champ (1 pt) . On rappelle :

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

2) En déduire la densité volumique de charges $\rho(x, y, z)$ en tout point de l'espace (1 pt)
3) On considère le cube défini par :

$$\mathcal{C} = \{M(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

a) On découpe (voir annexe qui suit) le cube en parallélépipèdes élémentaires de hauteur 2 et de volume :

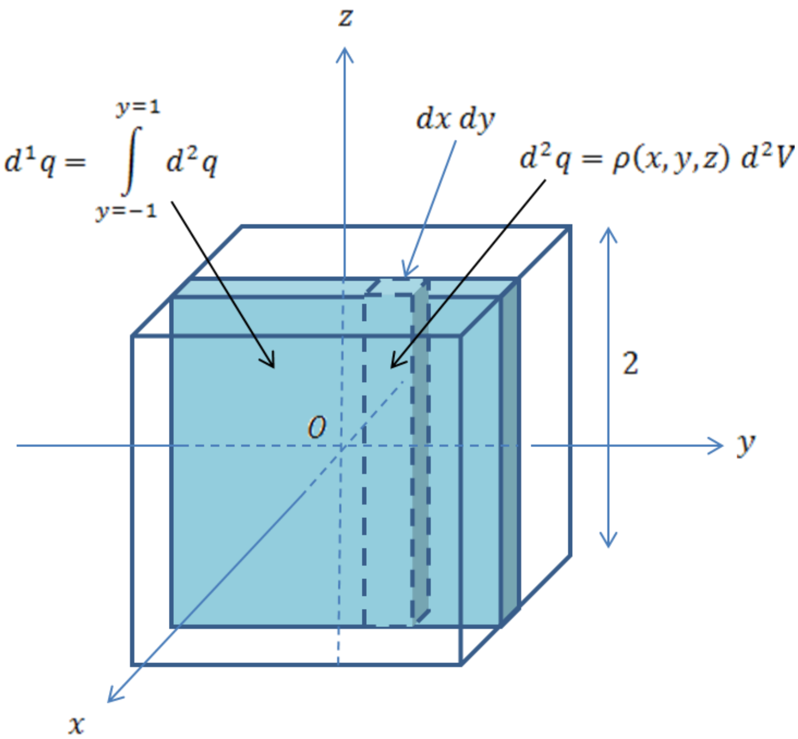
$$d^2V = 2\,dx\,dy$$

Calculer la charge élémentaire d^2q contenue dans ce volume (1 pt)

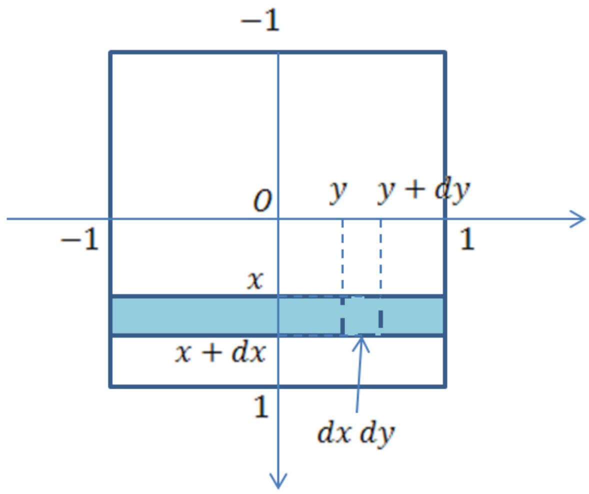
b) En déduire par calcul intégral la charge d^1q contenue entre des plans d'abscisses x et $x + dx$

c) En déduire la charge q contenue dans le cube puis le flux sortant du champ électrostatique à travers la surface du cube.

Annexe à l'exercice 3:



Vue en perspective du cube



Vue de dessus

Correction

Exercice 1

1) Posons :

$$E_x = x^3 + 3\,x\,y^2, E_y = 3\,x^2\,y + \ y^3, E_z = 0$$

On a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 6\,x = \ \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Les dérivées croisées sont égales donc le champ dérive d'un potentiel

2) On a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -x^3 - 3\,x\,y^2$$

Donc :

$$V = -\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\,x^2\,y^2 + c(x,y)$$

Et :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -3\,x^2\,y + \frac{\partial c}{\partial y} = -3\,x^2\,y - \ y^3$$

Donc :

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -\,y^3$$

Et :

$$c(x,y) = -\frac{y^4}{4} + k$$

D'où :

$$\boxed{V = -\frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}\,x^2\,y^2 + k}$$

3) On a :

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + k\right) - \left(-\frac{16}{4} - \frac{81}{4} - \frac{3}{2} \times 4 \times 9 + k\right)$$

$$= -2 + \frac{97}{4} + 54 = 52 + \frac{97}{4} = \frac{305}{4} = 76{,}25\,V$$

4) Le travail est :

$$W = q\,U_{AB} = 0{,}1 \times 76{,}25 = 7{,}625\,J$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{1}{2} m\,{v_B}^2 - \frac{1}{2} m\,{v_A}^2 = W$$

Soit :

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 7{,}625}{0{,}1}} \approx 12{,}3\,m\,s^{-1}$$

Exercice 2

1) On a :

$$\boxed{d^1 S = 2\,\pi\,R\,dx}$$

2) On en déduit :

$$\boxed{d^1 q = \sigma\,d^1 S = \frac{Q}{S}\,2\,\pi\,R\,dx = \frac{2\,\pi\,R\,Q}{2\,\pi\,R\,L}\,dx = \frac{Q}{L}\,dx = \frac{Q}{2\,b}\,dx}$$

3) On a :

$$\boxed{d^1 V(x) = \frac{d^1 q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{M(x)\,C(x)} = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\,\frac{dx}{\sqrt{R^2 + (x-z)^2}}}$$

4) On en déduit :

$$V(z) = \int_{-b}^{b} d^1 V(x)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b} \int_{-b}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-z)^2 + R^2}}$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left[Ln\left(x - z + \sqrt{(x-z)^2 + R^2}\right)\right]_{-b}^{b}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\,Ln\left(\frac{b - z + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}}{-b - z + \sqrt{(-b-z)^2 + R^2}}\right)}$$

5) Le champ est porté par l'axe et sa composante sur $\vec{\imath}$ est :

$$E_x(z) = -\frac{dV(z)}{dz}$$

On note que :

$$V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\ \left(Ln\left(b - z + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}\right) - Ln\left(-b - z + \sqrt{(-b-z)^2 + R^2}\right)\right)$$

Et on peut utiliser la formule rappelée au début en posant $t = b - z$ pour dériver par composée le premier logarithme et $t = -b - z$ pour dériver le second. Ainsi :

$$E_x(z) = -\frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(-\frac{1}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}} + \frac{1}{\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}}\right)$$

$$\boxed{E_x(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}}\right)}$$

On a :

$$E_x(-z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{(b+z)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(-b+z)^2 + R^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{1}{\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}}\right)$$

$$= -E_x(z)$$

6) Transformons E_x :

$$E_x(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{\sqrt{(-b-z)^2 + R^2} - \sqrt{(b-z)^2 + R^2}}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{((-b-z)^2 + R^2) - ((b-z)^2 + R^2)}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}\ \left(\sqrt{(-b-z)^2 + R^2} + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{(-b-z)^2 - (b-z)^2}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}\ \left(\sqrt{(-b-z)^2 + R^2} + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,b}\left(\frac{4\,b\,z}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}\ \left(\sqrt{(-b-z)^2 + R^2} + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{(b-z)^2 + R^2}\,\sqrt{(-b-z)^2 + R^2}\ \left(\sqrt{(-b-z)^2 + R^2} + \sqrt{(b-z)^2 + R^2}\right)}\right)$$

Nous pouvons maintenant faire tendre z vers $+\infty$ et :

$$E_x(z) \approx \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{z}{z\,z\,(z+z)} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{z^2}$$

Nous retrouvons bien l'expression du champ créé par une charge ponctuelle Q placée en O

Exercice 3

1) On a :

$$div\,\vec{E} = 3\,x^2 + 3\,y^2 + 3\,x^2 + 3\,y^2 = 6\,x^2 + 6\,y^2$$

2) On a :

$$\rho(x,y,z) = \varepsilon_0\,div\,\vec{E} = \varepsilon_0\,(6\,x^2 + 6\,y^2)$$

3) a)

$$d^2q = \rho(x,y,z)\,d^2V = \varepsilon_0\,(12\,x^2 + 12\,y^2)\,dx\,dy$$

b)

$$d^1q = \int_{y=-1}^{y=1} d^2q = \varepsilon_0\,dx \int_{y=-1}^{y=1} (12\,x^2 + 12\,y^2)\,dy = \varepsilon_0\,dx\,[12\,x^2\,y + \ 4\,y^3 +]_{-1}^{1}$$

$$= \varepsilon_0\,(24\,x^2 + 8)\,dx$$

c)

$$q = \int_{x=-1}^{x=1} d^1q = \varepsilon_0 \int_{x=-1}^{x=1} (24\,x^2 + 8)\,dx = \varepsilon_0\,[8\,x^3\ +\ 8\,x]_{-1}^{1} = 32\,\varepsilon_0\,C$$

d) Le flux sortant est :

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = 32$$