Premier devoir surveillé de Mathématiques : AI2

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : Volume d'un tétraèdre (4 pts)

On considère les 4 points A, B, C, D dont les coordonnées dans un repère orthonormé de l'espace sont :

$$A\ (1,0,0), B\ (0,1,0), C\ (0,0,1), D\ (1,2,3)$$

1) calculer l'aire du triangle A, B, C (on pourra s'aider d'un produit vectoriel)

2) calculer le volume du tétraèdre A, B, C, D (on pourra s'aider d'un déterminant pour calculer le volume d'un parallélépipède et en déduire celui du tétraèdre)

3) en déduire la distance h du point D au plan (A, B, C)

Exercice 2 : Torseur (4 pts) :

Un torseur est une application T qui à un point M de l'espace associe un vecteur $T(M)$ et telle qu'il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que pour tout couple de points (M, N) :

$$T(M) = T(N) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{MN}$$

Soit A, B, deux points de l'espace et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère l'application :

$$T(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{BM} \wedge \vec{v}$$

1) Montrer que T est un torseur et déterminer sa résultante $\vec{R}$.

2) On donne, dans un repère orthonormé, les coordonnées :

$$A\ (1,2,3), B\ (4,5,6), \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donner les coordonnées du vecteur $T(M)$ dans la base du repère en fonction des coordonnées (x, y, z) du point M.

Exercice 3 : Familles libres-liées (3 pts) :

1) La famille des trois vecteurs colonnes suivants est-elle libre ou liée ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) la famille de fonctions suivantes est-elle libre ou liée ?

$$(x \to cos^2(x), x \to\ cos(2\,x), x \to 1)$$

Exercice 4 : Sous espace engendré (6 pts) :

Pour chacune des questions, on se place dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{E}$ et on y définit un sous ensemble $\mathbb{F}$. Mettre $\mathbb{F}$ sous forme d'un sous espace engendré par une famille libre de vecteurs (Vect[…]).

1) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2 = \{(a,b) : \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{F} = \{(a,b) : \ a + 2\,b = 0\}$

2) $\mathbb{E} = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}$, $\mathbb{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \ a + d = b + c\right\}$

3) $\mathbb{E} = \mathbb{R}_2[X] = \{c + b\,X + a\,X^2 : \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$, $\mathbb{F} = \{P(X) \in \ \mathbb{E} : X\,P'(X) = 2\,P(X)\}$

3) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(U_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$, $\mathbb{F} = \{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} : \ \forall\, n \in \mathbb{N} : \ U_{n+1} = 3\,U_n\}$

Exercice 5 : Sous espace vectoriel (3 pts) :

On se place dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$

1) Le sous ensemble $\mathbb{F}$ suivant est- il stable pour l'addition, stable pour la multiplication externe. Est-ce un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$?

$$\mathbb{F} = \{(a,b,c) : \ a^2 + b^2 = c^2\}$$

2) Même question pour :

$$\mathbb{G} = \{(a,b,c) : \ a + b = c\}$$

Correction :

Exercice 1 :

1) L'aire est donnée par :

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$$

Or :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$$

L'aire est donc :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) Le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ est la valeur absolue du déterminant des trois vecteurs, soit :

$$\begin{vmatrix}-1&-1&0\\1&0&2\\0&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&0\\0&-1&2\\0&1&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}=5$$

Le volume du tétraèdre étant égal au sixième du volume du parallélépipède, il vaut :

$$\frac{5}{6}$$

3) Le volume du tétraèdre est également :

$$V=\frac{1}{3}Aire(A,B,C)\times h$$

Donc :

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times h$$

Soit :

$$h=\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 2 :

1)

$$T(M)=\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}+\overrightarrow{BM}\wedge\vec{v}=\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}\right)\wedge\vec{u}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM}\right)\wedge\vec{v}$$

$$=\overrightarrow{AN}\wedge\vec{u}+\overrightarrow{BN}\wedge\vec{v}+\overrightarrow{NM}\wedge\vec{u}+\overrightarrow{NM}\wedge\vec{v}$$

$$= T(M) + \overrightarrow{NM} \wedge (\vec{u} + \vec{v})$$

$$= T(M) + (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \overrightarrow{NM}$$

La résultante est donc $\vec{R} = \vec{u} + \vec{v}$

2) $T(M)$ a pour colonne coordonnée :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2+z-3 \\ x-1 \\ -x+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z+6 \\ -2\,z+12 \\ x-4-2\,y+10 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} y+1 \\ -x+2\,z-11 \\ -2\,y+7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1) Partons d'une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs :

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4\,y - 2\,z = 0 \quad (1) \\ -x + 3\,y - 5\,z = 0 \quad (2) \\ x - 5\,y + 7\,z = 0 \quad (3) \\ 2\,x + y + 3\,z = 0 \quad (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4\,y - 2\,z = 0 \quad (1) \\ 7\,y - 7\,z = 0 \quad (2) + (1) \\ -9\,y + 9\,z = 0 \quad (3) - (1) \\ -7\,y + 7\,z = 0 \quad (4) - 2\,(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\,z \\ y = z \end{cases}$$

On peut prendre $(x, y, z) = (-2,1,1)$. La famille est donc liée.

2) On a :

$$cos(2\,x) = cos^2(x) - sin^2(x) = cos^2(x) - \left(1 - cos^2(x)\right) = 2\,cos^2(x) - 1$$

La famille est donc liée.

Exercice 4 :

1) $\mathbb{F} = \{(a, b) :\ a + 2\,b = 0\} = \{(-2\,b, b) :\ b \in \mathbb{R}\} = \{b.(-2\,,1) :\ b \in \mathbb{R}\} = Vect[(-2\,,1)]$

2) $\mathbb{F} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} :\ a + d = b + c\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -d+b+c & b \\ c & d \end{pmatrix} : (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\right\}$

$$= \left\{b.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

$$= Vect\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

3) $\mathbb{F} = \{c + b\, X + a\, X^2 :\ X\,(b + 2\,a\,X) = \ 2\,c + 2\,b\,X + 2\,a\,X^2\} =$

$$= \{c + b\,X + a\,X^2 :\ b = 0\}$$

$$= \{c + a\,X^2 :\ \ (a, c) \in \mathbb{R}^2\} = Vect[1, X^2]$$

4)$\mathbb{F} = \{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} :\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ U_n = a \times 3^n\ , a \in \mathbb{R}\,\} = Vect[(3^n)_{n \in \mathbb{N}}]$

Exercice 5 :

1) Montrons que le sous ensemble n'est pas stable pour l'addition

On prend par exemple deux triplets pythagoriciens $(a, b, c) = (3,4,5)$ et $(a', b', c') = (5,12,13)$ et on fait leur somme : $(8,16,18)$. Les deux premiers triplets sont dans le sous-ensemble mais pas leur somme car :

$$8^2 + 16\,^2 = 64 + 256 = 320 \neq 18^2 = 324$$

En revanche il est stable pour la multiplication car : si (a, b, c) est dans le sous-ensemble alors :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Donc pour tout réel k :

$$(k\ a)^2 + (k\ b)^2 = k^2\ (a^2 + b^2) = k^2\ c^2 = (k\ c)^2$$

Donc :

$$k.(a, b, c) = (k\ a, k\ b, k\ c) \in \mathbb{F}$$

2)

$$\mathbb{G} = \{(a, b, a + b) :\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a.(1,0,1) + b.(0,1,1) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= Vect[(1,0,1), (0,1,1)]$$

$\mathbb{G}$ est un sous espace engendré par deux vecteurs, c'est donc un sous espace vectoriel.