Contrôle de Mathématiques AI2 –Octobre 2019

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Produit vectoriel (5 points)

On se place dans l'espace $\mathbb{E}$ muni d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on se donne un paramètre réel m et trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de colonnes-coordonnées dans cette base :

$$\vec{a} : \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} : \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} : \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

On considère la transformation f de l'espace qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur :

$$f(\vec{u}\,) = (\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{b} - m\ \vec{b}\wedge\vec{u}$$

On adopte les notations suivantes pour les colonnes-coordonnées de $\vec{u}$ et de $f(\vec{u})$

$$\vec{u} : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad , \quad f(\vec{u}) : \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de l'espace, c'est-à-dire, qu'elle vérifie :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\alpha) \in \mathbb{E}^2\times\mathbb{R} : \begin{cases} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(\alpha\,\vec{u}) = \alpha\, f(\vec{u}) \end{cases}$$

2) Déterminer en fonction de x, y, z la colonne-coordonnées de $(\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{b}$
3) Déterminer en fonction de x, y, z la colonne-coordonnées de $\vec{b}\wedge\vec{u}$
4) En déduire toujours en fonction de x, y, z celle de $f(\vec{u})$
5) Montrer que la détermination de l'ensemble $\mathbb{F}$ des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{c}$ se ramène à la résolution du système :

$$\begin{cases} 0\,x + m\,y + m\,z = 1 \\ -(m+1)x + 0\,y - z = 1 \\ (1-m)x + 0\,y + z = 1 \end{cases}$$

6) Pour quelles valeurs de m ce système a-t-il une solution unique ? Le résoudre dans ce cas. Que se passe-t-il dans le ou les autres cas ?

Exercice 2 : Sous espace vectoriel (7 points)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et on considère le sous-ensemble $\mathbb{F} = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, à savoir :

$$\mathbb{F} = \{c + b\,X + a\,X^2 :\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

1) Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$
2) On considère les polynômes $P_1(X) = X\,(2\,X - 1)$, $P_2(X) = X$, $P_3(X) = X^2 + 1$
   La famille $\left(P_1(X), P_2(X), P_3(X)\right)$ est elle libre ou liée ?

On considère le sous-ensemble $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$ défini par :

$$\mathbb{G} = \left\{P(X) \in \mathbb{F} :\ P(1) = \int_0^1 P(t)\,dt\right\}$$

3) Montrer que $\mathbb{G}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{F}$
4) En notant $c + b\,X + a\,X^2$ un élément de $\mathbb{G}$, donner une équation de $\mathbb{G}$ relative à a, b, c
5) En déduire deux polynômes libres $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ tels que : $\mathbb{G} = Vect[Q_1(X), Q_2(X)]$
   Puis la dimension de $\mathbb{G}$

Exercice 3 : Noyau d'une application linéaire (1,5 point)

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + z, x - y - t, y - z + t)$$

Exprimer le noyau sous forme d'un $Vect[\quad]$

Exercice 4 : Sous espace vectoriel (1,5 point)

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des suites géométriques de raison 2 (c'est-à-dire de la forme $a \times 2^n$

Montrer que $\mathbb{E}$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$ espace vectoriel formé par l'ensemble des suites réelles.

Exercice 5 : Déterminant (2 points)

Développer le déterminant en utilisant les propriétés sur les combinaisons de ligne et et colonne afin de le factoriser au maximum :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Exercice 6 : Aires et volumes dans l'espace (3 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et on considère les points : $A(0,1,1), B(2,3,0), C(1,3,5)$, $D(4,0,4)$.

1) Montrer que A, B, C, D définissent un tétraèdre et calculer son volume.
2) Déterminer l'aire du triangle A, B, C

Correction

Exercice 1

1) On a :

$$\begin{aligned} f(\vec{u}+\vec{v}) &= \left(\vec{a}\cdot\ (\vec{u}+\vec{v})\right)\vec{b} - m\,\vec{b}\wedge(\vec{u}+\vec{v}) \\ &= (\vec{a}\cdot\ \vec{u}+\vec{a}\cdot\ \vec{v})\,\vec{b} - m\left(\vec{b}\wedge\vec{u}+\vec{b}\wedge\vec{v}\right) \\ &= (\vec{a}\cdot\ \vec{u})\,\vec{b} + (\vec{a}\cdot\ \vec{v})\,\vec{b} - m\,\vec{b}\wedge\vec{u} - m\,\vec{b}\wedge\vec{v} \\ &= (\vec{a}\cdot\ \vec{u})\,\vec{b} - m\,\vec{b}\wedge\vec{u} + (\vec{a}\cdot\ \vec{v})\,\vec{b} - m\,\vec{b}\wedge\vec{v} \\ &= f(\vec{u})+f(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha\,\vec{u}) &= \left(\vec{a}\cdot(\alpha\,\vec{u})\right)\vec{b} - m\,\vec{b}\wedge(\alpha\,\vec{u}) \\ &= \alpha(\vec{a}\cdot\vec{u})\,\vec{b} - \alpha\,m\,\vec{b}\wedge\vec{u} \\ &= \alpha\,\left((\vec{a}\cdot\ \vec{u})\,\vec{b} - m\,\vec{b}\wedge\vec{u}\right) \\ &= \alpha\,f(\vec{u}) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire

2) On a :

$$(\vec{a}\cdot\ \vec{u})\,\vec{b}\,:\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = (x+z)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-(x+z)\\(x+z)\end{pmatrix}$$

3) On a :

$$\vec{b}\wedge\vec{u}\,:\ \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-z-y\\x\\x\end{pmatrix}$$

4) On en déduit :

$$f(\vec{u})\,:\begin{pmatrix}0\\-(x+z)\\(x+z)\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix}-z-y\\x\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}m\,y+m\,z\\-(1+m)\,x-\ z\\(1-m)\,x+z\end{pmatrix}$$

ou encore, sous forme de système :

$$\begin{cases} x' = 0\,x+m\,y+m\,z \\ y' = -(1+m)\,x+0\,y-\ z \\ z' = (1-m)\,x+0\,y+z \end{cases}$$

5) Ce qui précède montre que le problème se ramène à la résolution du système :

$$\begin{cases} 0\,x+m\,y+m\,z=1 \\ -(m+1)x+0\,y-\ z=1 \\ (1-m)x+\ 0\,y+\ z=1 \end{cases}$$

Et pour que ce système ait une solution unique, il faut que son déterminant soit non nul, ce dernier étant :

$$\begin{vmatrix} 0 & m & m \\ -(1+\ m) & 0 & -1 \\ (1-m) & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut remplacer la seconde colonne par sadifférence avec la troisième :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -m \\ -(1+\ m) & 1 & (-1+\ m) \\ (1-m) & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Et développer selon la première ligne

$$-m \begin{vmatrix} -(1+\ m) & 1 \\ (1-m) & -1 \end{vmatrix} = -m \quad (1+m-1+m) = -2\, m^2$$

Pour qu'il y ait une solution unique il faut et il suffit que m soit non nul. Le système se résout alors ainsi :

$$\begin{cases} y+z=1 \\ z=-(m+1)x-1 \\ z=(m-1)x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z \\ z=-(m+1)x-1 \\ -(m+1)x-1=(m-1)x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z \\ z=-(m+1)x-1 \\ -2=2\, m\, x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-z=1-\dfrac{1}{m} \\ z=\dfrac{m+1}{m}-1=\dfrac{1}{m} \\ x=\dfrac{-1}{m} \end{cases}$$

Dans le cas où m on peut noter que $f(\vec{u}) = \vec{c}$ entraine que $(\vec{a} \cdot \vec{u})\, \vec{b} = \vec{c}$ donc que $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont colinéaires ce qui est absurde au vu de leurs coordonnées.

Exercice 2

1) Première méthode :
   Soit $(P(X), Q(X), k) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{R}$ alors :
   $\exists\ (a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6 : P(X) = c + b\, X + a\, X^2\ , Q(X) = c' + b'\, X + a'\, X^2$

   Donc :

$$P(X) + Q(X) = (c + c') + (b + b')\, X + (a + a')\, X^2$$

$$k\,P(X) = \ (k\,c) + (k\,b)\,X + (k\,a)\,X^2$$

D'où :

$$P(X) + Q(X) \ \in \mathbb{F}$$

$$k\,P(X) \in \mathbb{F}$$

$\mathbb{F}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

<u>Deuxième méthode</u>

Il suffit de noter que :

$$\mathbb{F} = Vect[1, X, X^2]$$

2) Partons d'une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs

$$a\,P_1(X) + b\,P_2(X) + c\,P_3(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow a\,X\,(2\,X - 1) + b\,X + c\,(X^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\,a\,X^2 + (-\,a + b)\,X + c \ = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,a = 0 \\ -a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Ces 3 polynômes forment donc une famille libre.

3) Soit $(P(X), Q(X), k) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} \times \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{cases} P(1) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt \\ Q(1) = \displaystyle\int_0^1 Q(t)\,dt \end{cases}$$

Donc par addition :

$$P(1) + Q(1) = \int_0^1 P(t)\,dt + \int_0^1 Q(t)\,dt = \int_0^1 (P + Q)(t)\,dt$$

D'où :

$$P(X) + Q(X) \in \mathbb{G}$$

$\mathbb{G}$ est donc stable pour +

On a ensuite par multiplication par k :

$$k\ P(1) = k \int_0^1 P(t)\, dt$$

donc

$$k\, P(X) \in \mathbb{G}$$

$\mathbb{G}$ est donc stable pour la multiplication externe. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

4) On a pour : $P(X) = c + b\, X + a\, X^2$

$$P(1) = c + b\ + a$$

Et :

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \int_0^1 (c + b\, t + a\, t^2)\, dt = \left[c\, t + b\frac{t^2}{2} + a\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3}$$

Ainsi :

$$P(X) \in \mathbb{G} \Leftrightarrow\ \ c + b\ + a = c + \frac{b}{2} + \frac{a}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{2} + \frac{2\, a}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ b = -\frac{4}{3}\, a$$

5) En prenant a et c comme paramètres indépendants, on a :

$$\mathbb{G} = \left\{c + -\frac{4}{3}\, a\, X + a\, X^2 :\ (a, c) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$= \left\{c\ (1) + \frac{a}{3}\ (-4\, X + 3\, X^2) :\ (a, c) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$= Vect[1, -4\, X + 3\, X^2]$$

On a ainsi :

$$Q_1(X) = 1, \qquad Q_2(X) = -4\, X + \ 3\, X^2$$

Vérifions que ces deux polynômes forment une famille libre :

$$c\, Q_1(X) + a\, Q_2(X) = 0 \Leftrightarrow\ \ c - 4\, a\, X + 3\, a\, X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} c = 0 \\ -4\, a = 0 \\ 3\, a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ a = c = 0$$

Donc $\left(Q_1(X), Q_2(X)\right)$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{G}$. C'est donc une base de $\mathbb{G}$

Exercice 3 :

$$(x, y, z, t) \in N(f) \Leftrightarrow \ f(x, y; z, t) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \ (x + y + z, x - y - t, y - z + t) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - t - 0 \\ y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - y \\ t = x - y \\ y = -x - y - (x - y) = -2\,x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ t = 3\,x \\ y = -2\,x \end{cases}$$

Donc :

$$N(f) = \{(x, -2\,x, x, 3\,x) : x \in \mathbb{R}\} = Vect[(1, -2, 1, 3)]$$

C'est une droite vectorielle

Exercice 4 :

Soit $(U, V) \in \mathbb{E}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ alors les termes généraux des deux suites sont de la forme :

$$U_n = a \times 2^n \ ; \ \ V_n = b \times 2^n$$

Ainsi , le terme général de la suite $U + k\,V$ est de la forme :

$$U_n + k\,V_n = a \times 2^n + k\,b \times 2^n = (a + k\,b) \ \times 2^n$$

Donc :

$$U + k\,V \in \mathbb{E}$$

Donc $\mathbb{E}$ est stable pour $+$ et .

Exercice 5 :

a) On soustrait à la première ligne la seconde puis à la seconde la troisième

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 \\ b-c & a & c-b \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

On factorise $a - b$ dans la première ligne et $b - c$ dans la seconde :

$$(a-b)\,(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

On ajoute à la deuxième colonne la première :

$$(a-b)\,(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ c & a+c & b \end{vmatrix}$$

Et on développe selon la première ligne

$$(a-b)\,(b-c) \times 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ a+c & b \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\,(b-c)\,(a+b+c)$$

Exercice 6 :

1) pour que A, B, C, D définisse un tétraèdre, il faut et il suffit que la famille $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ soit libre donc de déterminant non nul. Or le déterminant est :

$$det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(6+4) - 2\,(3-16\,) - \,(-1-8)$$

$$= 20 + 26 + 9 = 55$$

Ce déterminant étant non nul, le tétraèdre est bien défini et son volume vaut :

$$V = \frac{1}{6}\left|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{55}{6}$$

2) L'aire du triangle est donnée par :

$$aire = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

Or :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$aire = \frac{1}{2}\sqrt{100 + 81 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{185}$$