Contrôle de Mathématiques AI2 –Octobre 2018

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Produit vectoriel (7 points)

On se place dans l'espace $\mathbb{E}$ muni d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et on se donne trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ de colonnes-coordonnées dans cette base :

$$\vec{a} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$$

On considère la transformation f de l'espace qui à tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur :

$$f(\vec{u}) = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{u})$$

On adopte les notations suivantes pour les colonnes-coordonnées de $\vec{u}$ et de $f(\vec{u})$

$$\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad f(\vec{u}) : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est une application linéaire de l'espace, c'est-à-dire, qu'elle vérifie :

$$\forall\, (\vec{u}, \vec{v}, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R} : \begin{cases} f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ f(\alpha\, \vec{u}) = \alpha\, f(\vec{u}) \end{cases}$$

2) Déterminer en fonction de x, y, z la colonne-coordonnées de $\vec{b} \wedge \vec{u}$
3) En déduire toujours en fonction de x, y, z celle de $f(\vec{u})$
4) Montrer que la détermination de l'ensemble $\mathbb{F}$ des vecteurs $\vec{u}$ tels que $f(\vec{u}) = \vec{c}$ se ramène à la résolution du système :

$$\begin{cases} -7\,x + 6\,y + 9\,z = 1 \\ 2\,x - 6\,y + 6\,z = 1 \\ x + 2\,y - 7\,z = m \end{cases}$$

5) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre ce système et déterminer la ou les valeurs du paramètre m tel(s) que ce système ait au moins une solution

Exercice 2 : Sous espace vectoriel (6 points)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et on considère le sous-ensemble $\mathbb{F} = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, à savoir :

$$\mathbb{F} = \{c + b\,X + a\,X^2 \;:\; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

1) Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$
2) On considère les polynômes $P_1(X) = (X+1)^2$, $P_2(X) = X$, $P_3(X) = (X-1)^2$
   La famille $\left(P_1(X), P_2(X), P_3(X)\right)$ est elle libre ou liée ?

On considère le sous-ensemble $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$ défini par :

$$\mathbb{G} = \{P(X) \in \mathbb{F} : \ P'(1) = 2\,P(0)\}$$

3) Montrer que $\mathbb{G}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{F}$
4) En notant $c + b\,X + a\,X^2$ un élément de $\mathbb{G}$, donner une équation de $\mathbb{G}$ relative à a, b, c
5) En déduire deux polynômes libres $Q_1(X)$ et $Q_2(X)$ tels que : $\mathbb{G} = Vect[Q_1(X), Q_2(X)]$
   Puis la dimension de $\mathbb{G}$

Exercice 3 : Déterminant (3 points)

1) Développer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

2) Factoriser l'expression obtenue

Exercice 4 : Aires et volumes dans l'espace (4 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et on considère les points : $A(0,1,1), B(2,x,0), C(1,3,x^2)$, $D(4,0,4)$ où x est un paramètre réel.

1) Quelle caractéristique doit avoir la famille $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ pour que A, B, C, D définisse un tétraèdre.
2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles A, B, C, D ne définit pas un tétraèdre
3) Déterminer, en fonction de x, le volume $V(x)$ du tétraèdre A, B, C, D, lorsque celui-ci est bien défini.
4) Déterminer s'il y a des valeurs de x pour lesquelles A, B, C ne définit pas un triangle
5) Déterminer, en fonction de x, l'aire $S(x)$ du triangle A, B, C lorsque celui-ci est bien défini.

Correction

Exercice 1

1) On a :

$$
\begin{aligned}
f(\vec{u}+\vec{v}) &= \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge (\vec{u}+\vec{v})\right)\\
&= \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{u} + \vec{b} \wedge \vec{v}\right)\\
&= \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{u}\right) + \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{v}\right)\\
&= f(\vec{u}) + f(\vec{v})
\end{aligned}
$$

$$f(\alpha\, \vec{u}) = \vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \alpha\, \vec{u}\right)$$

$$= \vec{a} \wedge \left(\alpha\left(\vec{b} \wedge \vec{u}\right)\right)$$

$$= \alpha \left(\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{u}\right)\right)$$

$$= \alpha\, f(\vec{u})$$

Donc f est linéaire

2) On a :

$$\vec{b} \wedge \vec{u} : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,z - y \\ x - 3\,z \\ 3\,y - 2\,x \end{pmatrix}$$

3) On en déduit :

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{u}\right) : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2\,z - y \\ x - 3\,z \\ 3\,y - 2\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,(3\,y - 2\,x) - 3\,(x - 3\,z) \\ 3\,(2\,z - y) - 1\,(3\,y - 2\,x) \\ 1\,(x - 3\,z) - 2\,(2\,z - y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7\,x + 6\,y + 9\,z \\ 2\,x - 6\,y + 6\,z \\ x + 2\,y - 7\,z \end{pmatrix}$$

ou encore, sous forme de système :

$$\begin{cases} x' = -7\,x + 6\,y + 9\,z \\ y' = 2\,x - 6\,y + 6\,z \\ z' = x + 2\,y - 7\,z \end{cases}$$

4) Ce qui précède montre que le problème se ramène à la résolution du système :

$$\begin{cases} -7\,x + 6\,y + 9\,z = 1 \\ 2\,x - 6\,y + 6\,z = 1 \\ x + 2\,y - 7\,z = m \end{cases}$$

On commence par échanger les lignes

$$\begin{cases} x + 2\,y - 7\,z = m \\ 2\,x - 6\,y + 6\,z = 1 \\ -7\,x + 6\,y + 9\,z = 1 \end{cases}$$

Puis on prend la première comme pivot pour simplifier les deux autres :

$$\begin{cases} x + 2\,y - 7\,z = m \\ -10\,y + 20\,z = 1 - 2\,m \\ 20\,y - 40\,z = 1 + 7\,m \end{cases}$$

On prend la seconde ligne comme pivot pour simplifier la troisième

$$\begin{cases} x + 2\,y - 7\,z = m \\ -10\,y + 20\,z = 1 - 2\,m \\ 0 = 3 + 3\,m \end{cases}$$

Ce système admet au moins une solution si et seulement si le paramètre m vaut -1

Dans ce cas il équivaut à, en prenant z comme paramètre :

$$\begin{cases} x + 2\,y = 7\,z - 1 \\ -10\,y = -20\,z + 3 \\ m = -1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = 3\,z - 0{,}4 \\ y = 2\,z - 0{,}3 \\ m = -1 \end{cases}$$

On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3\,z - 0{,}4 \\ 2\,z - 0{,}3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}4 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -0{,}4 \\ -0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1) Première méthode :

Soit $(P(X), Q(X), k) \in \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \mathbb{R}$ alors :
$\exists\,(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6 : P(X) = c + b\,X + a\,X^2\,, Q(X) = c' + b'\,X + a'\,X^2$

Donc :

$$P(X) + Q(X) = (c + c') + (b + b')\,X + (a + a')\,X^2$$
$$k\,P(X) = (k\,c) + (k\,b)\,X + (k\,a)\,X^2$$

D'où :

$$P(X) + Q(X) \in \mathbb{F}$$

$$k\,P(X) \in \mathbb{F}$$

$\mathbb{F}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{E}$

Deuxième méthode

Il suffit de noter que :

$$\mathbb{F} = Vect[1, X, X^2]$$

2) Partons d'une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs

$$a\,P_1(X) + b\,P_2(X) + c\,P_3(X) = 0$$

$$\Leftrightarrow a\,(X^2 + 2\,X + 1) + b\,X + c\,(X^2 - 2\,X + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + c)X^2 + (2\,a + b - 2\,c)\,X + (a + c) \;= 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 2\,a + b - 2\,c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ b = -4\,a \end{cases}$$

En prenant par exemple $(a, b, c) = (1, -4, -1)$ on a ainsi :

$$P_1(X) - 4\,P_2(X) - \;P_3(X) = 0$$

Il y a donc une combinaison nulle non triviale de ces 3 polynômes. Ils forment donc une famille liée.

3) Soit $(P(X), Q(X), k) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G} \times \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{cases} P'(1) = 2\,P(0) \\ Q'(1) = 2\,Q(0) \end{cases}$$

Donc par addition :

$$P'(1) + Q'(1) = 2\,P(0) + 2\,Q(0)$$

Soit :

$$(P + Q)'(1) = 2\,(P + Q)(0)$$

Puis par multiplication externe :

$$k\,P'(1) = k \times 2\,P(0)$$

Soit :

$$(kP)'(1) = 2\,(k\,P)(0)$$

D'où :

$$P(X) + Q(X) \in \mathbb{G}$$

$$k\,P(X) \in \mathbb{G}$$

$\mathbb{G}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe. C'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

4) On a pour : $P(X) = c + b\,X + a\,X^2$

$$P'(X) = b + 2\,a\,X$$

Donc :

$$P'(1) = b + 2\,a, \quad P(0) = c$$

Ainsi :

$$P(X) \in \mathbb{G} \Leftrightarrow \quad b + 2\,a = 2\,c$$

5) En prenant a et c comme paramètres indépendants, on a :

$$\mathbb{G} = \{c + (2\ \ c - 2\,a)\,X + a\,X^2 :\ (a,c) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{c\,(1 + 2\,X) + a\,(-2\,X +\ X^2) :\ (a,c) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= Vect[1 + 2\,X, -2\,X +\ X^2]$$

On a ainsi :

$$Q_1(X) = 1 + 2\,X, \qquad Q_2(X) = -2\,X +\ X^2$$

Vérifions que ces deux polynômes forment une famille libre :

$$c\,Q_1(X) + a\,Q_2(X) = 0 \Leftrightarrow \quad c + (2\ \ c - 2\,a)\,X + a\,X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 2\ \ c - 2\,a = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = c = 0$$

Donc $\left(Q_1(X), Q_2(X)\right)$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{G}$. C'est donc une base de $\mathbb{G}$

Exercice 3 :

On développe selon la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 1\,\begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - a\,\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} + a^2\,\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$= (b\,c^2 - b^2\,c) - a\ \ (c^2 - b^2) + a^2\,(c - b)$$

$$= b\,c\,(c - b) - a\ \ (c - b)\,(c + b) + a^2\,(c - b)$$

$$= (c - b)\,(b\,c - a\,(c + b) + a^2)$$

$$= (c - b)\,(b\,c - ac - a\,b + a^2)$$

$$= (c - b)\,(b\,(c - a) - a\,(c - a)\,)$$

$$= (c - b)(c - a)\,(b - a)$$

Exercice 4 :

1) pour que A, B, C, D définisse un tétraèdre, il faut et il suffit que la famille $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ soit libre donc de déterminant non nul
2) On a :

$$det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ x-1 & 2 & -1 \\ -1 & x^2-1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ x^2-1 & 3 \end{vmatrix} - (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ x^2-1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(6 + x^2 - 1) - (x - 1)\,(3 - 4\,(x^2 - 1)\,) - \,(-1 - 8)$$

$$= 10 + 2\,x^2 - (x - 1)\,(7 - 4\,x^2\,) + 9$$

$$= 2\,x^2 + 4\,x^3 - 7\,x - 4\,x^2 + 7 + 19$$

$$= 4\,x^3 - 2\,x^2 - 7\,x + 26$$

On note que -2 est racine du polynôme précédent. La factorisation donne :

$$4\,x^3 - 2\,x^2 - 7\,x + 26 = (x + 2)\,(x^2 + b\,x + 13)$$

Et par identification après développant du membre de droite, on trouve :

$$b = -4$$

Or le trinôme $x^2 - 4\,x + 13$ a un discriminant strictement négatif donc ne s'annule pas. Il en résulte que le déterminant s'annule pour $x = -2$ seulement

3) On a, lorsque le tétraèdre est bien défini, c'est-à-dire $x \neq -2$:

$$V(x) = \frac{1}{3}\left|det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{3}\,|4\,x^3 - 2\,x^2 - 7\,x + 26|$$

4) A, B, C ne définit pas un triangle si et seulement si la famille $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est liée c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Or :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ x-1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ x^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1)\,(x^2-1) + 2 \\ -1 - 2\left((x^2-1)\right) \\ 4 - (x-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x^3 - x^2 - x + 3 \\ -2\,x^2 + 1 \\ -x + 5 \end{pmatrix}$$

Il apparait ainsi que le produit vectoriel ne s'annule pour aucune valeur de x,donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est libre et le triangle toujours défini.

5) L'aire est alors :

$$S(x) = \frac{1}{2}\,\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\,\sqrt{(x^3 - x^2 - x + 3)^2 + (-2\,x^2 + 1)^2 + (-x + 5)^2}$$