Contrôle de Mathématiques AI2 –Octobre 2017

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Espaces vectoriels généraux (3,5 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^4$

Soit la famille de trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ définis par :

$$\vec{u} = (4,3,2,1) \ ; \ \vec{v} = (1,2,3,4) \ ; \vec{w} = (2,3,4,t)$$

1) Pour quelle valeur du paramètre t ces vecteurs forment ils une partie liée de $\mathbb{E}$?
2) Donner dans ce cas la dimension de $Vect(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Exercice 2 : Espaces vectoriels généraux (3,5 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

Soit

$$\mathbb{F} = \{\vec{u} = (x, y, z), \ x + y - 2\,z = 0)\} \qquad \mathbb{G} = \left\{\vec{u} = (x, y, z)), \begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}\right\}$$

1) Déterminer une base de $\mathbb{F}$ et une base de $\mathbb{G}$
2) Déterminer $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ et en déduire $dim(\mathbb{F} + \mathbb{G})$
3) dire si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires.

Exercice 3 : Espaces vectoriels généraux (4 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 et soit $\mathbb{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{E}$ formé celles f qui vérifient :

$$\begin{cases} f'(0) = 2\,f'(1) \\ \displaystyle\int_0^1 f(t)dt = f(0) \end{cases}$$

1) Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$
2) En donner une base

Exercice 4 : Espaces vectoriels généraux (3 points)

Soit $\mathbb{E}$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. On considère la famille d'éléments de $\mathbb{E}$ suivante :

$$\mathcal{F} = \big(x\,(x-1), x\,(x+2), (x-1)\,(x+2)\big)$$

1) Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{E}$
2) Déterminer les coordonnées du polynôme $x^2 + x + 1$ dans cette base

Exercice 5 : Déterminant –produit vectoriel (6 points)

Dans l'espace muni d'une base orthonormale $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère, pour un paramètre réel t, les trois vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de ces trois vecteurs
2) Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$
3) Calculer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$. Que retrouve-t-on ?
4) Pour quelles valeurs de t les trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont ils liés ?
5) De façon générale, on considère trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ fonctions dérivables d'une variable t et on pose $f(t) = (\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)) \cdot \vec{w}(t)$. Exprimer la dérivée $f'(t)$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et de leurs dérivées. En déduire une expression ne faisant apparaitre que des déterminants.

Corrigé

Exercice 1 :

1) Cherchons une combinaison linéaire nulle non triviale en résolvant :

$$x\,\vec{u} + y\,\vec{v} + z\,\vec{w} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x + y + 2\,z = 0 \\ 3\,x + 2\,y + 3\,z = 0 \\ 2\,x + 3\,y + 4\,z = 0 \\ x + 4\,y + t\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x + y + 2\,z = 0 \\ 5\,y + 6\,z = 0 \\ 5\,y + 6\,z = 0 \\ 15\,y + (4\,t - 2)\;\; z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x + y + 2\,z = 0 \\ 5\,y + 6\,z = 0 \\ (4\,t - 20)\,z = 0 \end{cases}$$

Ce système a une solution non triviale si et seulement si t vérifie :

$$4\,t - 20 = 0$$

soit :

$$t = 5$$

2) Dans ce cas, le système devient :

$$\begin{cases} 4\,x + y = -\,2\,z \\ 5\,y = -\,6\,z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{6}{5}\,z - 2\,z\right) = \; -\dfrac{1}{5}\,z \\ y = -\,\dfrac{6}{5}\,z \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $z = -5$

$$\vec{u} + 6\,\vec{v} - 5\,\vec{w} = \vec{0}$$

Soit :

$$\vec{u} = -6\,\vec{v} + 5\,\vec{w}$$

et

$$Vect(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = Vect(\vec{v}, \vec{w})$$

Mais en faisant $x = 0$ dans le système précédent, on voit qu'il conduit à $y = z = 0$ et donc que $(\vec{v}, \vec{w})$ est une partie libre donc une base de $Vect(\vec{v}, \vec{w})$

<u>Exercice</u> 2 :

1)

$$\mathbb{F} = \{\vec{u} = (x, y, z) : \quad x = -y + 2\,z\}$$

$$= \{\vec{u} = (-y + 2\,z, y, z) : \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{\vec{u} = y\,(-1,1,0) + z\,(2,0,1) : \ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= Vect\left(\overrightarrow{e_1} = (-1,1,0), \overrightarrow{e_2} = (2,0,1)\right)$$

Or il est aisé de vérifier que la partie $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre donc forme une base de $\mathbb{F}$

$$\mathbb{G} = \left\{\vec{u} = (x, y, z)), \begin{cases} x + 3y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{\vec{u} = (x, y, z)), \begin{cases} x = -3\,z \\ y = -z \end{cases}\right\}$$

$$= \{\vec{u} = (-3\,z, -z, z)) : \ z \in \mathbb{R}\}$$

$$= Vect\left(\overrightarrow{e_3} = (-3, -1,1)\right)$$

2)

$$\mathbb{F} \cap \mathbb{G} = \left\{\vec{u} = (x, y, z)), \begin{cases} x = -y + 2\,z \\ x = -3\,y \\ z = -y \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{\vec{u} = (x, y, z)), \begin{cases} -3\,y = -y - 2\,y \\ x = -3\,y \\ z = -y \end{cases}\right\}$$

$$= \left\{\vec{u} = (x, y, z)), \begin{cases} x = -3\,y \\ z = -y \end{cases}\right\}$$

$$= \mathbb{G}$$

Donc

$$dim(\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = dim(\mathbb{G}) = 1$$

$$dim(\mathbb{F}+\mathbb{G}) = dim(\mathbb{F}) + dim(\mathbb{G}) - dim(\mathbb{F}\cap\mathbb{G}) = 2+1-1 = 2$$

On peut aussi noter que :

$$\mathbb{F}+\mathbb{G} = \mathbb{F}$$

On a :

$$\mathbb{F}\cap\mathbb{G} \neq \{\vec{0}\}$$

Donc $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ ne sont pas supplémentaires

Exercice 3

1) Soit $(f, g, \alpha) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{cases} f'(0) = 2\,f'(1) \\ \int_0^1 f(t)dt = f(0) \end{cases}, \begin{cases} g'(0) = 2\,g'(1) \\ \int_0^1 g(t)dt = f(0) \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} (f+g)'(0) = 2\,(f+g)'(1) \\ \int_0^1 (f+g)(t)dt = (f+g)(0) \end{cases}, \begin{cases} (\alpha\, g)'(0) = 2\,(\alpha\, g)'(1) \\ \int_0^1 (\alpha\, g)(t)dt = (\alpha\, g)(0) \end{cases}$$

D'où :

$$f+g \in \mathbb{E}, \qquad \alpha\, f \in \mathbb{E}$$

$\mathbb{E}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe. C'est donc un sous espace vectoriel de l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

2) Posons $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ alors :

$$f'(x) = 3a\,x^2 + 2\,b\,x + c$$

$$\int_0^1 f(t)dt = a\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + b\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + c\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + d\,[t]_0^1 += \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d$$

$$f \in \mathbb{E} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6\,a + 4\,b + 2\,c \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\,a + 4\,b = -c \\ 3\,a + 4\,b = -6\,c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\,a = 5\,c \\ -4\,b = 11\,c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{5}{3}\,c \\ b = -\dfrac{11}{4}\,c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \ c\ \left(\frac{5}{3}x^3 - \frac{11}{4}\ x^2 + x\right) + d$$

Donc :

$$\mathbb{E} = Vect\left(1;\ \frac{5}{3}x^3 - \frac{11}{4}\ x^2 + x\right)$$

$$dim(\mathbb{E}) = 2$$

Exercice 4

1) Résolvons le problème :

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ a\,x\,(x-1) + b\,x\,(x+2) +\ c(x-1)\,(x+2) = 0$$

En prenant successivement pour x les valeurs particulières 0,1, -2 on obtient :

$$-2\,c = 0, 3\,b = 0, 6\,a = 0$$

Soit : $a = b = c = 0$

Donc les trois polynômes forment une partie libre à trois éléments dans l'espace qui est de dimension 3. Ils en forment donc une base.

2) Cherchons 3 réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ x^2 + x + 1 = a\,x\,(x-1) + b\,x\,(x+2) +\ c(x-1)\,(x+2)$$

Là encore, en prenant successivement pour x les valeurs particulières 0,1, -2 on obtient :

$$1 = -2\,c, 3 = 3\,b, 3 = 6\,a$$

Soit :

$$a = \frac{1}{2}, b = 1, c = -\frac{1}{2}$$

Exercice 5 :

1) Développons par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 3 \\ (1-t) & 0 & 2 \\ 1 & t & t \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} (1-t) & 2 \\ 1 & t \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} t & 3 \\ (1-t) & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(t - t^2 - 2) - t(2\,t - 3 + 3\,t) = -2\,t + 2\,t^2 + 4\ - 5\,t^2 + 3\,t$$

$$= -3\,t^2 + t + 4 = (t+1)\,(-3\,t + 4)$$

2) les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont :

$$\begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - t^2 \\ 2 - t^2 \\ -2 + 2\,t \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 3\,(t - t^2) + 2\,(2 - t^2) + t\,(-2 + 2\,t) = -3\,t^2 + t + 4$$

3) On retrouve le déterminant précédent
4) La condition pour les trois vecteurs soient liés est :

$$(t+1)\,(-3\,t + 4) = 0$$

Donc

$$t = -1\ ou\ t = \frac{4}{3}$$

5)

$$f(t) = (\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)) \cdot \vec{w}(t)$$

$$f(t) = \left(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)\right)' \cdot \vec{w}(t) + \left(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)\right) \cdot \vec{w}'(t)$$

$$= \left((\vec{u}'(t) \wedge \vec{v}(t)) + (\vec{u}(t) \wedge \vec{v}'(t))\right) \cdot \vec{w}(t) + \left(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)\right) \cdot \vec{w}'(t)$$

$$= (\vec{u}'(t) \wedge \vec{v}(t)) \cdot \vec{w}(t) + (\vec{u}(t) \wedge \vec{v}'(t)) \cdot \vec{w}(t) + \left(\vec{u}(t) \wedge \vec{v}(t)\right) \cdot \vec{w}'(t)$$

$$= det\left(\vec{u}'(t), \vec{v}(t), \vec{w}(t)\right) + det\left(\vec{u}(t), \vec{v}'(t), \vec{w}(t)\right) + +det\left(\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{w}'(t)\right)$$