Premier devoir surveillé de Mathématiques AI2

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 : Projection sur une droite vectorielle dans l'espace et symétrie (11 points)

L'espace étant muni d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le vecteur suivant

$$\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Soit p la projection vectorielle orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{w}$ et et s la symétrie vectorielle orthogonale par rapport à cette même droite.

1) Déterminer le vecteur colonne-coordonnées du vecteur $\vec{n}$ colinéaire à $\vec{w}$ et de même sens (1 point)
2) Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'espace. Exprimer $p(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u},\vec{n}$ et du produit scalaire (1 point)
3) Exprimer $s(\vec{u})$ en fonction de $\vec{u}$ et de $p(\vec{u})$ (1 point)

On décompose $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$ sous la forme :

$$\vec{u}=x\,\vec{\imath}+y\,\vec{\jmath}+z\,\vec{k}$$

et on introduit les colonnes-coordonnées de $\vec{u}$ et de $p(\vec{u})$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ et }\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\text{ respectivement}$$

4) Ecrire sous forme matricielle la relation existant entre ces deux vecteurs-colonne (1,5 points)
5) Vérifier que $\vec{w}$ est bien invariant par la transformation (1)
6) Traiter les mêmes questions en remplaçant $p(\vec{u})$ par $s(\vec{u})$ (1,5 point)
7) Déterminer la colonne-coordonnées de $\vec{m}=\vec{w}\wedge\vec{\imath}$ et vérifier que ce vecteur est changé en son opposé par la symétrie (1 point)
8) Déterminer la colonne-coordonnées de $\vec{q}=\vec{w}\wedge\vec{m}$ (1 point)
9) Vérifier que $(\vec{w},\vec{m},\vec{q})$ forment une base orthogonale et en les normant former une base $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ orthonormale puis donner les matrices des applications linéaires p et s dans cette base (2 points)

Exercice 2 : valeurs propres et vecteurs propres (7 points) :

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$. On désigne par Id l'endomorsphisme identité défini par :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \; Id(\vec{u}) = \vec{u}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est valeur propre de f si il existe $\vec{u} \neq \vec{0}$ tel que : $f(\vec{u}) = \lambda\,\vec{u}$

$\vec{u}$ est alors qualifié de vecteur propre associé à la valeur propre λ.

1) Identifier les valeurs propres et les vecteurs propres de la projection et de la symétrie orthogonale de l'exercice 1 (1 point)
2) Montrer de façon générale que l'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}$. On pourra montrer que cet ensemble est le noyau d'une application linéaire à définir et faisant intervenir Id (1 point)

On suppose maintenant que $\mathbb{V}$ est un plan vectoriel de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et que f a pour matrice dans cette base :

$$A = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Montrer que f est involutif, c'est-à-dire (2 points) :
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \; f\big(f(\vec{u})\big) = \vec{u}$$

On pourra montrer pour tout vecteur colonne X que l'on a $A\,(A\,X) = X$

4) Montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de f et déterminer les sous-espaces propres associés en résolvant (2 points) :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5) En déduire une base $(\vec{I},\vec{J})$ orthogonale de vecteurs propres (1 point)

Exercice 3 : Déterminant (2 points)

$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ étant une base orthonormée directe de l'espace, calculer le déterminant dans cette base des trois vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que représente ce déterminant d'un point de vue géométrique ?

Corrigé :

<u>Exercice 1 :</u>

1)

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{w}\|}\,\vec{w}$$

$$\vec{n}\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

2)

$$p(\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$

3)

$$s(\vec{u}) = 2\,p(\vec{u}) - \vec{u}$$

4)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0\,x + 1\,y + 2\,z)\,\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\y+2\,z\\2\,y+4\,z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

5)

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

6)

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = 2\times\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\y+2\,z\\2\,y+4\,z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}0\\y+2\,z\\2\,y+4\,z\end{pmatrix} - \frac{5}{5}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-\,5\,x\\-3\,y+4\,z\\4\,y+3\,z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

7)

$$\vec{m} = \vec{w}\wedge\vec{\imath} = (\vec{\jmath} + 2\,\vec{k})\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}\wedge\vec{\imath} + 2\,\vec{k}\wedge\vec{\imath} = -\,\vec{k} + 2\,\vec{\jmath}\quad\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$$

8)

$$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

9) On vérifie :

$$\vec{w}\cdot\vec{m}=\vec{w}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{m}=\vec{0}$$

$$\vec{I}\ :\ \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\quad,\qquad \vec{J}:\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ -1\end{pmatrix}\quad,\quad \vec{K}:\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Matrice de p dans $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matrice de s dans $(\vec{I},\vec{J},\vec{K})$:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2</u> :

1)

Valeurs propres de p : 0 et 1

Vecteurs propres associés à 0 : $N(p)=Vect((\vec{J},\vec{K})$

Vecteurs propres associés à 1 : $N(p-Id)=Vect(\vec{I})$

Valeurs propres de s : -1 et 1

Vecteurs propres associés à -1 : $N(p)=Vect((\vec{J},\vec{K})$

Vecteurs propres associés à 1 : $N(p-Id)=Vect(\vec{I})$

2)

Les vecteurs propres associés à une valeur propre λ sont définis par l'ensemble :

$$\mathbb{W} = \{\vec{u} \in \mathbb{V} : f(\vec{u}) = \lambda\, \vec{u}\} = N(f - \lambda\, Id)$$

En temps que noyau de l'endomorphisme $f - \lambda\, Id$ c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{V}$ mais redémontrons directement ce fait :

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \alpha) \in \mathbb{W} \times \mathbb{W} \times \mathbb{K}$ alors :

$$f(\vec{u}) = \lambda\, \vec{u}$$

$$f(\vec{v}) = \lambda\, \vec{v}$$

donc :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \lambda\, \vec{u} + \lambda\, \vec{v} = \lambda\, (\vec{u} + \vec{v})$$

$$f(\alpha\, \vec{u}) = \alpha\, f(\vec{u}) = \alpha\, (\lambda\, \vec{u}) = \lambda\, (\alpha\, \vec{u})$$

donc :

$$\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{W} \quad \alpha\, \vec{u} \in \mathbb{W}$$

$\mathbb{W}$ est donc stable pour l'addition et la multiplication externe, c'est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{V}$.

3)

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2\,x + 3\,y \\ 3\,x - 2\,y \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2\,x + 3\,y \\ 3\,x - 2\,y \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4\,x + 6\,y + 9\,x - 6\,y \\ 6\,x + 9\,y - 6\,x + 4\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4)

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x + 3\,y = \sqrt{13}\,x \\ 3\,x - 2\,y = \sqrt{13}\,y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2 - \sqrt{13}\right) x + 3\,y = 0 \\ 3\,x - \left(2 + \sqrt{13}\right) y = 0 \end{cases}$$

En multipliant par $2 + \sqrt{13}$ la première, ce système équivaut à :

$$\begin{cases}(-9)\,x+3\left(2+\sqrt{13}\right)y=\ 0\\ \quad 3\,x-\left(2+\sqrt{13}\right)y=0\end{cases}$$

Les deux équations étant équivalentes (la seconde est la première multipliée par (-3) le système équivaut à :

$$3\,x-\left(2+\sqrt{13}\right)y=0$$

1 est donc valeur propre et l'ensemble des vecteurs propres associés est formé des vecteurs de colonne-coordonnées de la forme :

$$\begin{pmatrix}\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\ y\\ y\end{pmatrix}=\frac{y}{3}\begin{pmatrix}2+\sqrt{13}\\ 3\end{pmatrix}$$

C'est donc une droite vectorielle :

$$\Delta_1 = Vect\left(\vec{I}_1\begin{pmatrix}2+\sqrt{13}\\ 3\end{pmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\,x+3\,y=-\sqrt{13}\,x\\ 3\,x-2\,y=-\sqrt{13}\,y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2+\sqrt{13}\right)x+3\,y=\ 0\\ 3\,x-\left(2-\sqrt{13}\right)y=0\end{cases}$$

En multipliant par $2-\sqrt{13}$ la première, ce système équivaut à :

$$\begin{cases}(-9)\,x+3\left(2-\sqrt{13}\right)y=\ 0\\ \quad 3\,x-\left(2-\sqrt{13}\right)y=0\end{cases}$$

Les deux équations étant équivalentes (la seconde est la première multipliée par (-3) le système équivaut à :

$$3\,x-\left(2-\sqrt{13}\right)y=0$$

-1 est donc valeur propre et l'ensemble des vecteurs propres associés est formé des vecteurs de colonne-coordonnées de la forme :

$$\begin{pmatrix}\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\ y\\ y\end{pmatrix}=\frac{y}{3}\begin{pmatrix}2-\sqrt{13}\\ 3\end{pmatrix}$$

C'est donc une droite vectorielle :

$$\Delta_2 = Vect\left(\vec{J}_1 \begin{pmatrix} 2-\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

5)

Formons le produit scalaire de $\vec{I}_1$ et $\vec{J}_1$

$$\vec{I}_1 \cdot \vec{J}_1 = \left(2+\sqrt{13}\right)\left(2-\sqrt{13}\right) + \ 9 = 4 - 13 + 9 = 0$$

Donc $\vec{I}_1$ et $\vec{J}_1$ sont orthogonaux. Reste à les normer pour former une base orthonormale de vecteurs propres. Or :

$$\|\vec{I}_1\| = \sqrt{\left(2+\sqrt{13}\right)^2 + 9} = \sqrt{4 + 2\sqrt{13} + 13 + 9} = \sqrt{26 + 2\sqrt{13}}$$

$$\|\vec{J}_1\| == \sqrt{26 - 2\sqrt{13}}$$

Ainsi :

$$\vec{I} : \frac{1}{\sqrt{26+2\sqrt{13}}}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{J} : \frac{1}{\sqrt{26-2\sqrt{13}}}\begin{pmatrix} 2-\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 3</u> :

$$\det_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}\left(\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-7) - 1 \times (-5) + 2 \times (-1)$$

$$= -21 + 5 - 2 = -18$$