Contrôle de Mathématiques AI2 –Octobre 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Applications réciproques (6 points)

Soit une fonction de la forme :

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres réels donnés avec c non nul.

a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité
b) Calculer la dérivée et les limites aux bornes du domaine de définition
c) A quelle condition sur a, b, c, d f est elle constante ?
d) Mettre f sous forme canonique et retrouver le résultat précédent. On exprimera les différents paramètres de la forme canonique en fonction de a, b, c, d et on travaillera avec cette forme par la suite.
e) En déduire, dans le cas où f n'est pas une fonction constante (f est alors qualifiée de fonction homographique) , le tableau de variation, en distinguant deux cas, et montrer que cette fonction permet de définir dans les deux cas une unique application bijective de son domaine de définition dans un domaine à déterminer
f) Donner alors l'expression analytique de l'application réciproque et en déduire que la réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique.

Exercice 2 : Structures (6 points)

On définit sur $\mathbb{R}^2$ deux lois internes :

$$(x\,, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x\,, y) * (x'\,, y') = (x\,x', x\,y' + x'y)$$

Nous avons déjà vu en cours que $\mathbb{R}^2$ est pour la loi $+$ un groupe commutatif

Montrer que $(\mathbb{R}^2\,, +, *)$ est un anneau commutatif

Exercice 3 : Equations différentielles (8 points)

a) Equation différentielle du premier ordre :

Soit l'équation différentielle :

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\,x}\,f(x) + \frac{x^3}{3}$$

En utilisant la méthode de variation de la constante, la résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$.

Retrouver une solution particulière par une autre méthode en la cherchant directement sous une forme puissance $c\,x^a$

Déterminer alors la solution de l'équation complète initiale qui vérifie la condition : $f(1) = 2$

b) Equation différentielle du second ordre

Soit l'équation différentielle :

$$f''(\mathrm{x}) + f'(\mathrm{x}) - 2\,f(x) = \sin(\,2x)$$

1) Résoudre l'équation homogène associée
2) Déterminer une solution particulière de la forme $f(x) = A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x)$
3) En déduire la solution générale de l'équation complète
4) Déterminer la solution qui vérifie : $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

Correction

Exercice 1 : Applications réciproques (6 points)

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

a)

$$\mathrm{D_f} = \mathrm{D_{f'}} = \left]-\infty\,;\,-\frac{d}{c}\right[\,\cup\,\left]-\frac{d}{c}\,;\,+\infty\right[$$

b)

$$\mathrm{f'(x)} = \frac{a\,(c\,x + d) - c\,(a\,x + b)}{(c\,x + d)^2} = \frac{ad - bc}{(c\,x + d)^2}$$

c)

f constante $\Leftrightarrow\ ad - bc = 0$

d) Forme canonique

on pose $c\,x + d = t$ soit

$$x = \frac{t - d}{c}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} = \frac{a\left(\frac{t-d}{c}\right) + b}{t} = \frac{a\,(t - d) + b\,c}{c\,t} = \frac{a\,t - ad + b\,c}{c\,t} = \frac{a\,t}{c\,t} - \frac{a\,d - b\,c}{c\,t}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a}{c} - \frac{a\,d - b\,c}{c\,(c\,x + d)} = \frac{a}{c} - \frac{a\,d - b\,c}{c\,(c\,x + d)} = \frac{a}{c} - \frac{a\,d - b\,c}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)}$$

Soit en posant :

$$k = -\frac{a\,d - b\,c}{c^2} \quad ; \quad \alpha = -\frac{d}{c} \quad ; \quad \beta = \frac{a}{c}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{k}{x - \alpha} + \beta$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a\,x}{c\,x} = \frac{a}{c} = \beta$$

$\lim\limits_{x - \infty} f(x) = \frac{a}{c} = \beta$

$\lim\limits_{x \to -\alpha^-} f(x) = -\infty$ si $k > 0$ ($+\infty$ si $k < 0$)

$\lim\limits_{x \to -\alpha^+} f(x) = +\infty$ si $k > 0$ ($-\infty$ si $k < 0$)

Tableau de variations :

k > 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	β		$\Vert$ $+\infty$		
		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
		$-\infty$	$\Vert$		β

k < 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$+\infty$	$\Vert$		β
		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	
	β		$\Vert$ $-\infty$		

Dans les deux cas, f définit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} f \ : \ \mathbb{R}\setminus\{\alpha\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{\beta\} \\ x & \to & y = f(x) = \dfrac{k}{x-\alpha} + \beta \\ x = f^{-1}(y) & \leftarrow & y \end{array}\right.$$

f)

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{\beta\}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$

$y = \dfrac{k}{x-\alpha} + \beta \iff y - \beta = \dfrac{k}{x-\alpha}$

$$\Leftrightarrow \ x-\alpha=\frac{k}{\mathrm{y}-\beta}$$

$$\Leftrightarrow \ x=\frac{k}{\mathrm{y}-\beta}+\alpha$$

Donc :

$$f^{-1}(y)=\frac{k}{\mathrm{y}-\beta}+\alpha$$

Ceci prouve que la réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique

Exercice 2 : Structures (6 points)

$(x\,,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$(x\,,y)*(x'\,,y')=(x\,x',x\,y'+x'y)$

$*$ **est commutative** :

D'une part :

$(x\,,y)*(x'\,,y')=(x\,x',x\,y'+x'y)$

D'autre part :

$(x'\,,y')*(x\,,y)=(x'x,x'y+x\,y')$

Les deux quantités sont égales

$*$ **est associative :**

D'une part :

$[(x\,,y)*(x',y')]*(x'',y'')=(x\,x',x\,y'+x'y)*(x'',y'')$

$=\big((x\,x')\,x'',(x\,x')\,y''+x''(x\,y'+x'y)\big)=(x\,x'\,x'',x\,x'\,y''+x''x\,y'+x''x'y)$

D'autre part :

$(x\,,y)*[(x',y')*(x'',y'')]=(x\,,y)*(x'x'',x'y''+x''y')$

$=(x\,(x'\,x''),x\,(x'y''+x''y')+(x'x'')y)=(x\,x'\,x'',x\,x'\,y''+x\,x''y'+x'x''y)$

Les deux quantités sont égales

$*$ **a un élément neutre $(\mathbf{1}\ ,\mathbf{0})$:**

$(x\ ,y) * (1\ ,0) = (1\ ,0) * (x\ ,y) = (x\ ,y)$

$*$ **est distributive par rapport à + :**

D'une part :

$(x\ ,y) * [(x',y') + (x'',y'')] = (x\ ,y) * (x' + x'',y' + y'')$

$= (x\ (x' + x'')\ ,x\ (y' + y'') + (x' + x'')\ y) = (x\ x' +\ x\ x''\ ,x\ y' + x\ y'' + x'\ y + x''\ y)$

D'autre part :

$(x\ ,y) * (x',y') + (x\ ,y) * (x'',y'') = (x\ x',x\ y' + x'y) + (x\ x'',x\ y'' + x''y)$

$= (x\ x' + x\ x'',x\ y' + x'y + x\ y'' + x''y)$

Les deux quantités sont égales

Exercice 3 : Equations différentielles (8 points)

a)

sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\ x}\ f(x) + \frac{x^3}{3}$$

Solution de l'équation homogène :

$$f(x) = c\ e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Ln(x)}} = c\ e^{\ \mathrm{Ln}(\sqrt{\mathrm{x}})} = c\ \sqrt{x}$$

Méthode de variation de la constante :

On cherche une solution particulière

$$f_P(x) = c(x)\ \sqrt{x}$$

$$f_P{}'(\mathrm{x}) = c'(x)\sqrt{x} + \frac{c(x)}{2\ \sqrt{x}}$$

$$f_P{}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\ x}\ f_P(x) + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow c'(x)\ \sqrt{x} + \frac{c(x)}{2\ \sqrt{x}} = \ \frac{1}{2\ x}\ c(x)\sqrt{x} + \ \frac{x^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow c'(x)\ \sqrt{x} = \ \frac{x^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow c'(x)\ \ = \ \ \frac{x^2\ \sqrt{x}}{3}$$

$$\Leftrightarrow c(x) \ = \ \frac{1}{3} \, x^{\frac{5}{2}} + cte$$

$$\Leftrightarrow c(x) \ = \ \frac{1}{3} \, \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + cste = \frac{2}{21} x^{\frac{7}{2}} + cste$$

Une solution particulière est donc :

$$f_P(x) = \frac{2}{21} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} = \frac{2}{21} x^{\frac{8}{2}} = \frac{2}{21} \, x^4$$

Deuxième méthode : Cherchons directement f_P sous la forme :

$f_P(x) = c \, x^a$ avec $a \neq 0$

$f_P{}'(\mathrm{x}) = \mathrm{a} \ \mathrm{c} \ x^{a-1}$

$$f_P{}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\,x} \, f_P(x) + \frac{x^3}{3} \Leftrightarrow \mathrm{a} \ \mathrm{c} \ x^{a-1} \ = \ \frac{1}{2\,x} \, c \, x^a + \frac{x^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a} \ \mathrm{c} \ x^{a-1} = \ \frac{c \, x^{a-1}}{2} + \frac{x^3}{3}$$

En prenant a tel que : $a - 1 = 3$ soit $a = 4$ et c tel que :

$$4 \ \mathrm{c} = \frac{c}{2} + \frac{1}{3}$$

Soit :

$$\mathrm{c} = \frac{2}{21}$$

nous avons pour solution particulière :

$$f_P(x) = \frac{2}{21} \, x^4$$

La solution générale de l'équation complète est alors :

$$f(x) = c \sqrt{x} + \frac{2}{21} \, x^4 \ \ , \ \ c \in \mathbb{R}$$

Pour un solution quelqconque, nous avons :

$$f(1) = c \sqrt{1} + \frac{2}{21} \, 1^4 \ = c + \frac{2}{21}$$

Ainsi :

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow c + \frac{2}{21} = 1$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{19}{21}$$

Ainsi, l'unique solution telle que $f(1) = 1$ est :

$$f(x) = \frac{19}{21}\sqrt{x} + \frac{2}{21}x^4$$

b)

$$f''(\mathrm{x}) + f'(\mathrm{x}) - 2\,f(x) = \sin\,(\,2x)$$

1)

Equation caractéristique :

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow (k - 1\,)(k + 2) = 0$$

Elle a donc deux racines distinctes :

$k_1 = -2$ et $k_2 = 1$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$f(x) = c\,e^{-2\,x} + d\,e^{\,x}$ avec $(c\,; d) \in \mathbb{R}^2$

2)

Solution particulière sous la forme

$$f_P(x) = A\cos(2\,x) + B\sin(2\,x)$$

$$f_P{}'(\mathrm{x}) = -2\,\mathrm{A}\,\sin(2\,x) + 2\,B\,\cos(2\,x)$$

$$f_P{}''(\mathrm{x}) = -4\,A\cos(2\,x) - 4\,B\sin(2\,x)$$

$$f_P{}''(\mathrm{x}) + f_P{}'(\mathrm{x}) - 2\,f_P(x) = \sin(\,2x)$$

$$\Leftrightarrow (-4\,A + 2\,B - 2\,A)\,\cos(2\,x) + (-4\,B - 2\,A - 2\,B)\,\sin(2\,x) = \sin(2\,x)$$

$$\Leftrightarrow (-6\,A + 2\,B)\,\cos(2\,x) + (-2\,A - 6\,B)\,\sin(2\,x) = \sin(2\,x)$$

Pour que la relation précédente soit satisfaite, il suffit d'identifier les coefficients de $\cos(2\,x)$ et de $\sin(2\,x)$ dans les deux membres. Cela conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} -6\,A + 2\,B = 0 \\ -2\,A - 6\,B = 1 \end{cases}$$

Ce système conduit à :

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{20} \\ B = -\dfrac{3}{20} \end{cases}$$

Une solution particulière est donc :

$$f_P(x) = -\frac{1}{20}\cos(2\,x) - \frac{3}{20}\,\sin(2\,x)$$

La solution générale de l'équation complète est donc :

$f(x) = c\,e^{-2\,x} + d\,e^{\,x} - \frac{1}{20}\cos(2\,x) - \frac{3}{20}\,\sin(2\,x)$ avec $(c\,;d) \in \mathbb{R}^2$

Et sa dérivée :

$$f'(x) = -2\,c\,e^{-2\,x} + d\,e^{\,x} + \frac{1}{10}\sin(2\,x) - \frac{3}{10}\cos(2\,x)$$

Elle vérfie :

$$f(0) = c + d - \frac{1}{20}$$

$$f'(0) = -2\,\mathrm{c} + \mathrm{d} - \frac{3}{10}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + d - \dfrac{1}{20} = 1 \\ -2\,\mathrm{c} + \mathrm{d} - \dfrac{3}{10} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c + d = \dfrac{21}{20} \\ -2\,\mathrm{c} + \mathrm{d} = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{1}{4} \\ \mathrm{d} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

La solution vérifiant ces conditions est donc :

$$f(x) = \frac{1}{4}\, e^{-2\,x} + \frac{4}{5}\cos(2\,x) - \frac{1}{20}\cos(2\,x) - \frac{3}{20}\sin(2\,x)$$