Premier devoir surveillé de Mathématiques : AI1

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : sommes remarquables (3 pts)

Simplifier les sommes en faisant apparaitre si possible une forme factorisée :

$$S_n = \sum_{k=n}^{2\,n+1} (3\,k - 7)$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (1+x)^k$$

Exercice 2 : Sommes des carrés consécutifs (4 pts)

a) Etablir l'expression simplifiée de la somme (2 pts) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

(On pourra s'aider de la somme télescopique : $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3)$)

b) En déduire, après transformation, la limite en $+\infty$ de la suite de terme général (2 pts) :

$$U_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=n+1}^{2\,n} k^2$$

Exercice 3 : Sommes télescopiques (3 pts)

a) Etablir la formule de trigonométrie pour tout réel x (1 pt):

$$sin(2\,x) = 2\,sin(x)\,cos(x)$$

b) On considère la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Ln\left(cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)$$

En exprimant $cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ à partir de $sin\left(\frac{x}{2^n}\right)$ et $sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)$ mettre S_n sous forme d'une somme télescopique et en calculer la somme (2 pts).

Exercice 4 : Binôme de Newton (4 pts)

On considère pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction :

$$f(x) = (2 + x)^n$$

a) Démontrer à l'aide des formules factorielles pour $0 \leq k \leq n$ (1 pt)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

b) Donner l'expression développée de $f(x)$ en utilisant la formule du binôme de Newton (1 pt).

c) En déduire la valeur de (1 pt):

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$$

d) En dérivant $f(x)$ de deux façons , en déduire pour $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de (1 pt) :

$$\sum_{k=0}^{n} k\, 2^k \binom{n}{k}$$

Exercice 5 : Complexes (6 pts)

a) en utilisant l'égalité : $e^{i\,(a+b)} = e^{i\,a}\, e^{i\,b}$ retrouver les formules de de duplication de la trigonométrie (2 pts)

b) en déterminant deux réels x et y tels que : $e^{i\,a} + e^{i\,b} = e^{i\,x}\left(e^{i\,y} + e^{-i\,y}\right)$ retrouver les formules de trigonométrie permettant de factoriser $cos(a) + cos(b)$ et $sin(a) + sin(b)$ (2 pts)

c) En utilisant les formules d'Euler donner une primitive de la fonction suivante (2 pts) :

$$f(x) = sin^3(x)\, cos^2(x)$$

Correction :

Exercice 1 :

S_n est la somme de $n+2$ termes d'une suite arithmétique de raison 3 donc :

$$S_n = \frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2} \times Nombre\ de\ termes =$$

$$\frac{(3\,n-7)+(3\,(2\,n+1)-7)}{2}\ (n+2) = \frac{(n+2)\,(3\,n-7)\,(6\,n-4)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)\,(9\,n-11)}{2}$$

Si $x=-1$: $T_n = 0$

Si $x \neq -1$:

T_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $(1+x)$ donc :

$$T_n = 1er\ terme\ \times \frac{1-raison^{Nombre\ de\ termes}}{1-raison}$$

$$= (1+x)^1\ \frac{1-(1+x)^n}{1-(1+x)} = \frac{(1+x)((1+x)^n-1)}{x}$$

Exercice 2 :

a) on part de :

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3\,k^2+3\,k+1-k^3) = 3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 3\,S_n + 3\ \frac{n\,(n+1)}{2}+n$$

D'autre part cette somme étant télescopique, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3) = (n+1)^3-1^3 = (n+1)^3-1$$

On en déduit par comparaison :

$$3\,S_n + 3\ \frac{n\,(n+1)}{2}+n = (n+1)^3-1$$

Soit :

$$3\,S_n = (n+1)^3 - \frac{3}{2}\,n\,(n+1) - \ (n+1)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\ (n+1)\ \left((n+1)^2-\frac{3}{2}\,n-1\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\ (n+1)\ \left(n^2+2\,n-\frac{3}{2}\,n\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\, n\,(n+1)\,\left(n + 2\, - \frac{3}{2}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2\,n+1)$$

b) On note que :

$$U_n = \frac{1}{n^3}\,(S_{2\,n} - S_n) = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}\,(2\,n)\,\big((2\,n)+1\big)\,(2\,(2\,n)+1) - \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6\,n^3}\, n\,(2\,n+1)\,\big(2\,(4\,n+1) - (n+1)\big)$$

$$= \frac{1}{6\,n^2}\,(2\,n+1)\,(7\,n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{2\times 7}{6} = \frac{7}{3}$$

<u>Exercice 3 :</u>

a) on utilise la formule de duplication :

$$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + cos(a)\,sin(b)$$

En donnant la même valeur x à a et b.

$$sin(2\,x) = 2\,sin(x)\,cos(x)$$

b) on a :

$$sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) = sin\left(2\,\frac{x}{2^n}\right) = 2\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\,cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Donc :

$$cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Et :

$$Ln\left(cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = Ln\left(\frac{sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right) = Ln\left(\frac{2^{n-1}\,sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2^n\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right)$$

$$= Ln\left(2^{n-1}\,sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\right) - Ln\left(2^n\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} Ln\left(cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = Ln\left(2^{1-1}\,sin\left(\frac{x}{2^{1-1}}\right)\right) - Ln\left(2^n\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

$$= Ln\big(sin(x)\big) - Ln\left(2^n\,sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)$$

Exercice 4 :

a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)\,!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\ \big(n-(n-k)\big)\,!} = \frac{n!}{(n-k)\,!\ k!}$$

b)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^k\ \ x^{n-k}$$

c) En faisant $x = 1$, on obtient par deux façons :

$$f(1) = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^k$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^k = 3^n$$

d) En dérivant $f(x)$ de deux façons , on obtient :

$$f(x) = n\ (2+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\ 2^k\ \ (n-k)\ x^{n-k-1}$$

Et en faisant $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\ 2^k\ \ (n-k) = n\ 3^{n-1}$$

Soit, en notant que la somme peut être étendue à $k = n$ avant d'être séparée en deux :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^k\ n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^k\ k = n\ 3^{n-1}$$

$$n\ 3^n\ - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ 2^k\ k = n\ 3^{n-1}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} k\ 2^k \binom{n}{k} = n\ 3^n - n\ 3^{n-1} = n\ 3^{n-1}\ (3-1) = 2\ n\ 3^{n-1}$$

Exercice 5 :

a) $e^{i\,(a+b)} = e^{i\,a}\,e^{i\,b}$ se traduit par :

$$cos(a+b) + i\,sin(a+b) = \big(cos(a) + i\,sin(a)\big)\,\big(cos(b) + i\,sin(b)\big)$$

$$= cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b) + i\,\big(sin(a)\,cos(b) + cos(a)\,sin(b)\big)$$

Donc, en identifiant parties réelles et imaginaires :

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$$

$$sin(a+b) = sin(a)\,cos(b) + cos(a)\,sin(b)$$

b) on a :

$$e^{i\,x}\left(e^{i\,y} + \,e^{-i\,y}\right) = e^{i\,(x+y)} + e^{i\,(x-y)}$$

Les nombres cherchés vérifient sont donc les solutions du système :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Lequel se résout par somme et différence en :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

Or, en utilisant une formule d'Euler, on a :

$$e^{i\,x}\left(e^{i\,y} + \,e^{-i\,y}\right) = 2\,cos(y)\,e^{i\,x}$$

On en déduit :

$$e^{i\,a} + \,e^{i\,b} = 2\,cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\,e^{i\,\frac{a+b}{2}}$$

On en déduit, en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$cos(a) + cos(b) = 2\,cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\,cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$sin(a) + sin(b) = 2\,cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\,sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

c)

$$f(x) = \left(\frac{e^{i\,x} - e^{-i\,x}}{2\,i}\right)^3\,\left(\frac{e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{-1}{8\,i} \times \frac{1}{4}\,\left(\left(e^{i\,x}\right)^3 - 3\left(e^{i\,x}\right)^2\left(e^{-i\,x}\right)^1 + 3\left(e^{i\,x}\right)^1\left(e^{-i\,x}\right)^2 - \left(e^{-i\,x}\right)^3\right)\,\left(\left(e^{i\,x}\right)^2 + 2\,e^{i\,x}\,e^{-i\,x} + \left(e^{-i\,x}\right)^2\right)$$

$$= \frac{-1}{32\,i}\left(e^{3\,i\,x} - 3\,e^{i\,x} + 3\,e^{-i\,x} - e^{-3\,i\,x}\right)\left(e^{2\,i\,x} + 2 + e^{-2\,i\,x}\right)$$

$$= \frac{-1}{32\,i}\left(e^{5\,i\,x} + 2\,e^{3\,i\,x} + e^{i\,x} - 3\,e^{3\,i\,x} - 6\,e^{i\,x} - 3\ - 3\,e^{-\,i\,x} + 3\,e^{i\,x} + 6\,e^{-i\,x} + 3\,e^{-3\,i\,x} - e^{-i\,x} - 2\,e^{-3\,i\,x} - e^{-5\,i\,x}\right)$$

$$= \frac{-1}{32\,i}\left(\left(e^{5\,i\,x} - e^{-5\,i\,x}\right) - \left(e^{3\,i\,x} - \ e^{-3\,i\,x}\right) - 2\left(e^{i\,x} - \ e^{-\,i\,x}\right)\right)$$

$$= \frac{-1}{32\,i}\left(2\,i\,sin(5\,x) - 2\,i\,sin(3\,x) - 4\,i\,sin(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\ sin(5\,x) + \frac{1}{16}\ sin(3\,x) + \frac{1}{8}\ sin(x)$$

Une primitive s’en déduit :

$$F(x) = \frac{1}{80}\ cos(5\,x) - \frac{1}{48}\ cos(3\,x) - \frac{1}{8}\ cos(x)$$