Contrôle de Mathématiques AI1 –Octobre 2019

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Calculer les sommes (6 points)

$$a)\quad S_1 = \sum_{k=2}^{n} (3\,k - 7)$$

$$b)\quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} (3\,k + 2)^2$$

(conseil : On pourra commencer par développer : $(3\,k + 2)^2$)

$$c)\quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{k\,x} - e^{\{k+2\}\,x}\right)$$

(conseil : On pourra noter que : $e^{k\,x} - e^{\{k+2\}\,x} = e^{k\,x} - e^{\{k+1\}\,x} + e^{\{k+1\}\,x} - e^{\{k+2\}\,x}$)

$$d)\quad S_4 = \sum_{k=n}^{2\,n} k^2$$

Et factoriser l'expression obtenue au maximum

Exercice 2 : Formule du binôme (2,5 points)

Développer en organisant les résultats d'une façon logique :

$(1 - e^{3\,x})^3$

$(2\,x^2 - 3)^5$

Exercice 3 : Trigonométrie (4 points)

a) Donner une expression factorisée de : $cos(a) - cos(b)$
(conseil : on pourra poser : $a = x + y$; $b = x - y$)

b) Montrer que :

$$cos(a)\,cos(b) = \frac{1}{2}\left(cos(a+b) + cos(a-b)\right)$$

Application : Donner une primitive de : $f(x) = cos(3\,x)\,cos\,(5\,x)$

Exercice 4 : Application réciproque (7,5 points)

On considère la fonction définie par

$$f(x) = Ln(x^2 + x + 1)$$

1) Donner le domaine de définition de cette fonction
2) Calculer sa dérivée
3) Déterminer ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$
4) Etablir son tableau de variation
5) En déduire que cette fonction définit deux bijections sur des intervalles maximaux et préciser ces bijections (ensemble de départ, ensemble d'arrivée
6) Etablir les expressions des applications réciproques de ces bijections
7) En déduire par deux méthodes distinctes, les dérivées de ces applications réciproques en précisant bien le domaine sur lesquelles elles sont dérivables

Correction

Exercice 1 :

a) La somme est celle d'une suite arithmétique de raison 3 donc :

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n} (3\,k-7) = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times Nombre\ de\ termes}{2}$$

$$= \frac{(-1+3\,n-7)\,(n-1)}{2} = \frac{(3\,n-8\,)(n-1)}{2}$$

b) Développons sous le signe somme

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} (3\,k+2)^2 = \sum_{k=1}^{n} (9\,k^2+12\,k+4) = 9\sum_{k=1}^{n} k^2 + 12\sum_{k=1}^{n} k + 4\sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 9\,\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} + 12\,\frac{n\,(n+1)}{2} + 4\,n$$

$$= \frac{3\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{2} + 6\,n\,(n+1) + 4\,n$$

$$= \frac{3\,n\,(n+1)\,(2\,n+1) + 12\,n\,(n+1) + 8\,n}{2} = \frac{n\left((3\,n+3)\,(2\,n+1) + 12\ (n+1) + 8\right)}{2}$$

$$= \frac{n\,(6\,n^2+9\,n+3+12\,n+12+8)}{2} = \frac{n\,(6\,n^2+21\,n+23)}{2}$$

c) On fait apparaitre des sommes télescopiques :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{k\,x} - e^{\{k+2\}\,x}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{k\,x} - e^{\{k+1\}\,x}\right) + \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\{k+1\}\,x} - e^{\{k+2\}\,x}\right)$$

$$= 1 - e^{\{n+1\}\,x} + e^{x} - e^{\{n+2\}\,x}$$

d)

$$S_4 = \sum_{k=n}^{2\,n} k^2 = \sum_{k=1}^{2\,n} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2\,n\,(2\,n+1)(\,4\,n+1)}{6} - \frac{(n-1)\,n\,(\,2\,n-1)}{6}$$

$$= \frac{n\left((4\,n+2)(\,4\,n+1) - (n-1)\,(\,2\,n-1)\,\right)}{6}$$

$$= \frac{n\,(16\,n^2+12\,n+2-2\,n^2+3\,n-1\,)}{6} = \frac{n\,(14\,n^2+15\,n+1\,)}{6}$$

Exercice 2 :

$(1-e^{3\,x})^3 = 1-3\ e^{3\,x}+3\,e^{6\,x}-e^{9\,x}$

$(2\,x^2-3)^5 = (2\,x^2)^5-5\,(2\,x^2)^4\times 3+10\,(2\,x^2)^3\times 3^2-10\,(2\,x^2)^2\times 3^3+5\,(2\,x^2)\times 3^4-3^5$

$= 32\,x^{10}-240\,x^8+720\,x^6-1080\,x^4+810\,x^2-243$

Exercice 3

a) On pose :

$$\begin{cases} a = x+y \\ b = x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$cos(a) - cos\ (b = cos(x+y) - cos\ (x-y)$$

$$= cos(x)\,cos(y) - sin(x)\,sin(y) - (cos(x)\,cos(y) + sin(x)\,sin(y))$$

$$= -\,2\,sin(x)\,sin(y)$$

$$= -2\,sin\left(\frac{a+b}{2}\right)sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

b) On a :

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$$

Par somme on déduit :

$$cos(a+b) + cos(a-b) = 2\ cos(a)\,cos(b)$$

puis la formule souhaitée

Application :

$$f(x) = cos(3\,x)\,cos\ (5\,x) = \frac{1}{2}\big(cos(3\,x+5\,x) + cos(3\,x-5\,x)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\ cos(8\,x) + \frac{1}{2}\ cos(-2\,x) = \frac{1}{2}\ cos(8\,x) + \frac{1}{2}\ cos(2\,x)$$

Une primitive s'en déduit :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{sin(8\,x)}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{sin(2\,x)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\ sin(8\,x) + \frac{1}{4}\ sin(2\,x)$$

Exercice 4 :

1) Le trinôme $x^2 + x + 1$ ayant un discriminant négatif, il reste de signe strictement positif sur l'ensemble des réels et donc :

$$D_f = \mathbb{R}$$

2) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et :

$$f'(x) = \frac{2\,x + 1}{x^2 + x + 1}$$

3) Les limites sont par composition $+\infty$ en $+\infty$ et en $-\infty$
4) Le tableau s'en déduit

x	$-\infty$		-1/2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$Ln(\frac{3}{4})$	$\nearrow$	$+\infty$

5) La fonction définit deux bijections :

$$f_1 : \quad]-\infty;\ -1/2] \quad \rightarrow \quad \left[Ln\left(\frac{3}{4}\right);+\infty\right[$$

$$x \rightarrow f(x)$$

$$f_2 : \ \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[\quad \rightarrow \quad \left[Ln\left(\frac{3}{4}\right);+\infty\right[$$

$$x \rightarrow f(x)$$

6) On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \left[Ln\left(\frac{3}{4}\right)\ ;+\infty\right[$:

$$y = Ln(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow\ x^2 + x + 1 = e^y$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + x + 1 - e^y = 0$$

Le discriminant de cette équation de la variable x à paramètre y est :

$$\Delta = 1 - 4\,(1)\,(1 - e^y) = 4\,e^y - 3\ \geq 0$$

L'équation admet deux racines :

$$x_1(y) = \frac{-1 - \sqrt{4\,e^y - 3}}{2}\ ;\ x_2(y) = \frac{-1 + \sqrt{4\,e^y - 3}}{2}$$

On en déduit :

$$f_1^{-1}(y) = \frac{-1 - \sqrt{4\,e^y - 3}}{2};\ f_2^{-1}(y) = \frac{-1 + \sqrt{4\,e^y - 3}}{2}$$

1) Les deux applications réciproques sont dérivables sur $\left]Ln\left(\frac{3}{4}\right); +\infty\right[$ et :

$$f_1^{-1'}(y) = -\frac{4\,e^y}{2 \times 2\,\sqrt{4\,e^y - 3}} = -\frac{e^y}{\sqrt{4\,e^y - 3}}$$

$$f_2^{-1'}(y) = \frac{4\,e^y}{2 \times 2\,\sqrt{4\,e^y - 3}} = \frac{e^y}{\sqrt{4\,e^y - 3}}$$

La deuxième méthode consiste à appliquer la formule :

$$f_2^{-1'}(y) = \frac{1}{f_2'\left(f_2^{-1}(y)\right)} = \frac{\left(f_2^{-1}(y)\right)^2 + f_2^{-1}(y) + 1}{2\,f_2^{-1}(y) + 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{4\,e^y - 3}}{2}\right)^2 + \frac{-1 + \sqrt{4\,e^y - 3}}{2} + 1}{2\,\frac{-1 + \sqrt{4\,e^y - 3}}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1 - 2\sqrt{4\,e^y - 3} + 4\,e^y - 3}{4} + \frac{-1 + \sqrt{4\,e^y - 3}}{2} + 1}{\sqrt{4\,e^y - 3}}$$

$$= \frac{\frac{1 - 2\sqrt{4\,e^y - 3} + 4\,e^y - 3 - 2 + 2\,\sqrt{4\,e^y - 3} + 4}{4}}{\sqrt{4\,e^y - 3}}$$

$$= \frac{e^y}{\sqrt{4\,e^y - 3}}$$

Idem pour $f_1^{-1'}(y)$