Contrôle de Mathématiques AI1 –Octobre 2018

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Calculer les sommes (6 points)

$a)\quad S_1 = \sum_{k=2}^{n} (2\,k + 3)$

$b)\quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} (2\,k - 1)^2$

(conseil : On pourra commencer par développer : $(2\,k-1)^2$)

En déduire que pour tout entier naturel non nul n le nombre $n\,(2\,n-1)\,(2\,n+1)$ est divisible par un même nombre entier à déterminer.

$c)$ Pour $x \neq 0$: $S_3 = \sum_{k=0}^{n} e^{k\,x}$

(conseil : On pourra noter que : $e^{k\,x} = (e^x)^k$)

En déduire :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} k\, e^{k\,x}$$

Exercice 2 : Formule du binôme (4,5 points)

Développer en organisant les résultats d'une façon logique :

$(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b-c)^2$

$(1+e^{2\,x})^3$

$(2\,x-2)^5$

Exercice 3 : Formule de Leibniz (5,5 points)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un même intervalle I

a) Calculer $(f \times g)^{(2)}$ et $(f \times g)^{(3)}$ en fonctions des dérivées successives de f et g

b) Soit la proposition logique :

$$P(n) = "(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n-k)} "$$

Montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n

Exercice 4 : Trigonométrie (4 points)

a) Donner une expression factorisée de : $sin(a) - sin(b)$

b) Montrer que :

$$sin(a)\, sin(b) = \frac{1}{2}\left(cos(a-b) - cos(a+b)\right)$$

Application : Donner une primitive de : $f(x) = sin(2x)\, sin\,(7x)$

Correction

Exercice 1 :

a) La somme est celle d'une suite arithmétique de raison 2 donc :

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n} (2\,k+3) = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times Nombre\ de\ termes}{2}$$

$$= \frac{(7+2\,n+3)(n-1)}{2} = \frac{(2\,n+10)(n-1)}{2} = (n+5)\,(n-1)$$

b) Développons sous le signe somme

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} (2\,k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4\,k^2 - 4\,k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\,\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 4\,\frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} - 4\,\frac{n\,(n+1)}{2} + n = \frac{2\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{3} - \,2\,n\,(n+1) + n$$

$$= \frac{2\,n\,(n+1)\,(2\,n+1) - 6\,n\,(n+1) + 3\,n}{3} = \frac{n\left((2\,n+2)\,(2\,n+1) - 6\,\,(n+1) + 3\right)}{3}$$

$$= \frac{n\,(4\,n^2 + 6\,n + 2 - 6\,n - 6 + 3)}{3} = \frac{n\,(4\,n^2-1)}{3} = \frac{n\,(2\,n-1)\,(2\,n+1)}{3}$$

Il apparait ainsi que $n\,(2\,n-1)\,(2\,n+1)$ est divisible par 3

c) On fait apparaitre la somme de termes d'une suite géométrique de raison $e^x \neq 1$:

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} e^{k\,x} = \sum_{k=0}^{n} (e^x)^k = \frac{1-(e^x)^{n+1}}{1-e^x} = \frac{1-e^{(n+1)\,x}}{1-e^x}$$

En dérivant la relation ainsi obtenue, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} k\,e^{k\,x} = \frac{\left(1-e^{(n+1)\,x}\right)'(1-e^x) - \left(1-e^{(n+1)\,x}\right)(1-e^x)'}{(1-e^x)^2}$$

$$= \frac{-(n+1)\,e^{(n+1)\,x}(1-e^x) - \left(1-e^{(n+1)\,x}\right)(-e^x)}{(1-e^x)^2}$$

$$= \frac{-\,(n+1)\,e^{(n+1)\,x} + (n+1)\,e^{(n+2)\,x} + e^x - e^{(n+2)\,x}}{(1-e^x)^2}$$

$$= \frac{n\,e^{(n+2)\,x} - \,(n+1)\,e^{(n+1)\,x} + e^x}{(1-e^x)^2}$$

<u>Exercice</u> 2 :

$(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b-c)^2$

$=a^2+b^2+c^2+2\,a\,b+2\,a\,c+2\,b\,c$

$+\,a^2+b^2+c^2-2\,a\,b+2\,a\,c-2\,b\,c$

$+\,a^2+b^2+c^2+2\,a\,b-2\,a\,c-2\,b\,c$

$+\,a^2+b^2+c^2-2\,a\,b-2\,a\,c+2\,b\,c$

$=3\,(a^2+b^2+c^2)$

$(1+e^{2\,x})^3=(1)^3+3\,(1)^2\,(e^{2\,x})+3\,(1)\,(e^{2\,x})^2+(e^{2\,x})^3=\;1+3\,e^{2\,x}+3\,e^{4\,x}+e^{6\,x}$

$(2\,x-2)^5=$

$(2\,x)^5+\;5\,(2\,x)^4\,(-2)+\;10\,(2\,x)^3\,(-2)^2\;+10\,(2\,x)^2\,(-2)^3+\;5\,(2\,x)^1(-2)^4\;+(-2)^5$

$=32\,x^5-160\,x^4+320\,x^3-320\,x^2+160\,x-32$

<u>Exercice 3</u> :

a) On a sur l'intervalle concerné :

$$(f\times g)^{(2)}=\left(f^{(1)}\,g+f\,g^{(1)}\right)^{(1)}$$

$$=f^{(2)}\,g+f^{(1)}\,g^{(1)}+f^{(1)}\,g^{(1)}+f\,g^{(2)}$$

$$=f^{(2)}\,g+2\,f^{(1)}\,g^{(1)}+f\,g^{(2)}$$

On a :

$$(f\times g)^{(3)}=\left(f^{(2)}\,g+2\,f^{(1)}\,g^{(1)}+f\,g^{(2)}\right)^{(1)}$$

$$=f^{(3)}\,g+f^{(2)}\,g^{(1)}+2\,f^{(2)}\,g^{(1)}+2\,f^{(1)}\,g^{(2)}+f^{(1)}\,g^{(2)}+f\,g^{(3)}$$

$$=f^{(3)}\,g+3\,f^{(2)}\,g^{(1)}+2\,f^{(1)}\,g^{(2)}+f\,g^{(3)}$$

b) $P(0), P(1), P(2), P(3)$ sont vraies d'après a)

Soit alors un entier naturel n tel que $P(n)$ soit vraie alors :

$$(f\times g)^{(n+1)}=\left((f\times g)^{(n)}\right)^{(1)}=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,f^{(k)}\;g^{(n-k)}\right)^{(1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} \ g^{(n-k)} + f^{(k)} \ g^{(n+1-k)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} \ g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)}$$

$$= \binom{n}{n+1-1} f^{(n+1)} \ g^{(n+1-(n+1))} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} \ g^{(n+1-0)}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} \ g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} \ g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} \ g^{(n+1)}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} \ g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} \ g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} \ g^{(n+1-k)}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$

<u>Exercice 4</u>

a) On pose :

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+b}{2} \\ y = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$sin(a) - sin\ (b = sin(x+y) - sin\ (x-y)$$

$$= sin(x)\,cos(y) + cos(x)\,sin(y) + (sin(x)\,cos(y) - cos(x)\,sin(y))$$

$$= 2\,sin(x)\,cos(y)$$

$$= 2\,sin\left(\frac{a+b}{2}\right) cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

b) On a :

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sin(a)\,sin(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sin(a)\,sin(b)$$

Par somme on déduit :

$$cos(a-b) - cos(a+b) = 2\ sin(a)\,sin(b)$$

puis la formule souhaitée

Application :

$$f(x) = sin(2x)\,sin\,(7x) = \frac{1}{2}\big(cos(2x-7x) - cos(2x+7x)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\,cos(5x) - \frac{1}{2}\,cos(9x)$$

Une primitive s’en déduit :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{sin(5x)}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{sin(9x)}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\,sin(5x) - \frac{1}{18}\,sin(9x)$$