Contrôle de Mathématiques AI1 –Octobre 2017

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Calculer les sommes (4 points)

$$S_1 = \sum_{k=3}^{n} (3\,k + 1)$$

$$S_2 = \sum_{k=3}^{n} (k-1)^2$$

Pour $x \neq 0$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{10000} cos(k\,\pi)$$

Exercice 2 : Formule du binôme (4,5 points)

Développer en organisant les résultats d'une façon logique :

$(a+b+c+d)^2$

$(a+b+c)^3$

$(x+2)^7$

Exercice 3 : Combinaisons (3,5 points)

a) Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, k \in [\![1, n]\!] : \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

b) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(t) = (t+1)^n$$

Développer $f(t)$ par la formule du binôme puis intégrer la relation obtenue entre les bornes 0 et x.
En déduire une relation sur les coefficients binomiaux en donnant à x la valeur 1.

Exercice 4 : Symétrie orthogonale par rapport à une droite (4 points)

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et les points $A(1,2)$, $B(-1,0)$, $C(-2,3)$

a) Déterminer l'aire du triangle $A\ B\ C$ en unité d'aire du repère
b) Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point D symétrique de B par rapport à la droite (AC) . Faire un dessin pour vérifier.

Exercice 5 : Trigonométrie (4 points)

a) Donner une expression factorisée de : $cos(a) - cos\ (b)$
b) Montrer que :

$$sin(a)\ co\,s(b) = \frac{1}{2}\left(sin(a+b) + sin(a-b)\right)$$

Application : Donner une primitive de : $f(x) = sin(3x)\, cos\ (5x)$

Correction

Exercice 1 : La première somme est celle d'une suite arithmétique de raison 3 donc :

$$S_1 = \sum_{k=3}^{n} (3\,k+1) = \frac{(premier\ terme + dernier\ terme) \times Nombre\ de\ termes}{2}$$

$$= \frac{(10 + 3\,n + 1)(n-2)}{2} = \frac{(3\,n+11)(n-2)}{2}$$

Pour la seconde, faisons un changement d'indice

$$S_2 = \sum_{k=3}^{n} (k-1)^2 = \sum_{k=2}^{n-1} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 1 = \frac{(n-1)\,n\,(2\,n-1)}{6} - 1$$

S_3 est une somme de termes d'une suite géométrique de raison $1/x$ donc :

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$S_4 = \sum_{k=1}^{10000} cos(k\,\pi) = \sum_{k=1}^{10000} (-1)^k = 0$$

Exercice 2 :

$(a+b+c+d)^2 = (a+b)^2 + 2\,(a+b)\,(c+d) + (c+d)^2$

$= a^2 + 2\,a\,b + \ b^2 + 2\,a\,c + 2\,a\,d + 2\,b\,c + 2\,b\,d + c^2 + 2\,c\,d + \ d^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,a\,d + 2\,b\,c + 2\,b\,d + 2\,c\,d$

$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3$

$= \ a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3 + 3\,a^2\,c + 6\,a\,b\,c + 3\,b^2\,c + 3\,a\,c^2 + +3\,b\,c^2 + c^3$

$= a^3 + b^3 + c^3 + 3\,(a^2\,b + a^2\,c + a\,b^2 + a\,c^2 + b^2\,c + b\,c^2) + 6\,a\,b\,c$

$(x+2)^7 = x^7 + 7\,x^6.2 + 21\,x^5.2^2 + 35\,x^4.2^3 + 35\,x^3.2^4 + 21\,x^2.2^5 + 7\,x.2^6 + 2^7$

$= x^7 + 14\,x^6 + 84\,x^5 + 280\,x^4 + 560\,x^3 + 672\,x^2 + 448\,x + 128$

Exercice 3 :

a)

$$k\binom{n}{k} = k\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = k\,\frac{n\,(n-1)\,!}{k\,(k-1)\,!\,(n-k)!} = n\,\frac{(n-1)\,!}{(k-1)\,!\,\big((n-1)-(k-1)\big)!}$$

$$= n\binom{n-1}{k-1}$$

b)

$$f(t) = (t+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,t^k$$

$$\int_0^x (t+1)^n\,dt = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^x t^k\,dt$$

$$\left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x$$

$$\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

Pour $x = 1$ on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}}{n+1}}$$

Exercice 4 :

a) Calculons le déterminant :

$$det\big(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\big) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 - 2\times(-1) = 6+2 = 8$$

L'aire du triangle est la moitié de cette valeur soit 4

b) Posons $D(x,y)$. Traduisons alors que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est le symétrique orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au vecteur $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD} = 2\,\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

Or :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

Donc en colonne-coordonnées, l'équation devient :

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=2\,\frac{-2\times(-3)+(-2)\times 1}{(-3)^2+1^2}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=\frac{4}{5}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}5\,(x-1)=-12+10\\ 5\,(y-2)=4+10\end{cases}$$

$$\begin{cases}5\,x-5=-2\\5\,y-10=14\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=\dfrac{24}{5}\end{cases}$$

Exercice 5

a) On pose :

$$\begin{cases}a=x+y\\b=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a+b}{2}\\ y=\dfrac{a-b}{2}\end{cases}$$

$$cos(a)-cos\,(b=cos(x+y)-cos\,(x-y)$$

$$=cos(x)\,cos(y)-sin(x)\,sin(y)+(cos(x)\,cos(y)+sin(x)\,sin(y))$$

$$=2\,cos(x)\,cos(y)$$

$$=2\,cos\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

b) On a :

$$sin(a+b)=sin(a)\,cos(b)+cos(a)\,sin(b)$$

$$sin(a-b)=sin(a)\,cos(b)-cos(a)\,sin(b)$$

Par somme on déduit :

$$sin(a+b)+sin(a-b)=2\ sin(a)\,cos(b)$$

puis la formule souhaitée

Application :

$$f(x) = sin(3x)\, cos\,(5x) = \frac{1}{2}\big(sin(8x) + sin(-2x)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\, sin(8x) - \frac{1}{2}\, sin(2x)$$

Une primitive s'en déduit :

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\,cos(8x)}{8}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-\,cos(2x)}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}\, cos(8x) + \frac{1}{4}\, cos(2x)$$