Premier devoir surveillé de Mathématiques AI1

Enseignant : Laurent Gry

Exercice 1 : Applications réciproques (9 points)

Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 4}{x - 1}$$

1) Préciser le domaine de définition de $f$ ainsi que le domaine de dérivabilité. On étudiera précisément la dérivabilité en 0 (1 point)
2) Montrer que la dérivée de $f$ est, sur son domaine de dérivabilité (1 point) :

$$f(x) = \frac{-x - 8\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}\,(x - 1)^2}$$

En déduire les variations de $f$ sur son domaine de définition (0,5 point)

3) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition (1,5 point)
4) En déduire le tableau de variation et donner l'allure de la courbe de $f$ dans un repère orthonormé (0,5 point)
5) Montrer que $f$ définit une bijection sur un sous ensemble maximal de $\mathbb{R}$. On précisera les deux ensembles en bijection (1 point)
6) Déterminer l'expression analytique de la réciproque $f^{-1}$ (3 points)
7) Quelles particularités présentent les courbes $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$ (0,5 point)

Exercice 2 : Combinaisons (2 points)

Montrer que l'on pour tous entiers naturels $k$ et $n$ tels que : $2 \leq k \leq n + 2$ :

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$$

Exercice 3 : Binôme de Newton (4 points)

Développer par la formule du binôme de Newton

$$(x^2 - 2)^5$$

$$(x^2 - 3\,x + 1)^4$$

Exercice 4 : sommes    (5 points)

Effectuer un changement d'indice dans  les sommes afin que l'écriture du terme générique soit la plus simple possible et calculer le cas échéant cette somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{cos\big((k+2)\,\pi\big)}{k+2}$$

$$\sum_{i=3}^{20} (i-3)^2$$

Calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{100} (3\,i+2)$$

Dériver quatre fois la fonction :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2\,k+1}}{(2k+1)\,!}$$

Correction

1) $D_f = [0;1[ \cup ]1;+\infty[$

$f$ est dérivable sur $]0;1[ \cup ]1;+\infty[$. En 0, il faut considérer le taux d'acroissement

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{h}+4}{h-1}+4\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{h}+4+4(h-1)}{h-1}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{h}+4\,h}{h-1}\right) = \frac{\sqrt{h}\left(1+4\sqrt{h}\right)}{h(h-1)} = \frac{1+4\sqrt{h}}{\sqrt{h}\,(h-1)}$$

Ainsi :

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = -1$$

Donc $f$ est dérivable à droite en 0 et : $f_d{}'(0) = -1$

2) sur $]0;1[ \cup ]1;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\left(\sqrt{x}+4\right)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-2\,x-8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2} = \frac{-x-8\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\,(x-1)^2} < 0$$

A noter que cette formule est encore valable pour le nombre dérivé à droite en 0.

$f$ est donc strictement décroissante sur $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$

3)

En factorisant les termes dominants au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{\sqrt{x}+4}{x-1} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}\;\frac{1+\frac{4}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}}$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

D'autre part :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = -4$$

4)

On en déduit le tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-4$ $\searrow$ | $-\infty$ | $\|$ | $+\infty$ $\searrow$ | $0$ |

5) $f$ définit donc une bijection de $[0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ dans $]-\infty; -4] \cup \ ]0; +\infty[$

6) On a :

$$\forall\ (x, y) \in [0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \ \times \ ]-\infty; -4] \cup \ ]0; +\infty[ \ :$$

$$y = \frac{\sqrt{x} + 4}{x - 1} \Leftrightarrow y\ (x - 1) = \sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow y\, x - y = \sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow y\, x - \sqrt{x} - (y + 4) = 0$$

En posant $\sqrt{x} = t$ on résout pour $t > 0$ :

$$y\, t^2 - t - (y + 4) = 0$$

Le discriminant pour ce polynôme en $t$ est :

$$\Delta_y = 1 + 4\, y\ (y + 4) = 4\, y^2 + 16\, y + 1$$

Le discriminant pour ce polynôme en $y$ est :

$$\Delta = 16^2 - 16 = 16 \times 15$$

Il a donc deux racines :

$$y_1 = \frac{-16 - 4\sqrt{15}}{8} = -2 - \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-16 + 4\sqrt{15}}{8} = -2 + \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ces deux racines sont dans l'intervalle $]-4;0[$ donc le polynôme en $y$ est de signe strictement positif sur le domaine de $y$ concerné , $]-\infty;-4] \cup \ ]0;+\infty[$

Le polynôme en $t$ a donc deux racines distinctes :

$$t_1(y) = \frac{1 - \sqrt{4\,y^2 + 16\,y + 1}}{2\,y}$$

$$t_2(y) = \frac{1 + \sqrt{4\,y^2 + 16\,y + 1}}{2\,y}$$

Or :

$$t_1(y)\,t_2(y) = \frac{c}{a} = -\frac{y+4}{y}$$

Et on vérifie aisément que cette dernière quantité est strictement négative sur $]-\infty;-4] \cup$ $]0;+\infty[$. On en déduit que les deux racines sont de signe contraire.

Or sur $]0;+\infty[$ : $t_2(y) > 0$ donc : $t_1(y) < 0$

Et sur $]-\infty;-4[$ : $t_2(y) < 0$ donc : $t_1(y) > 0$

D'où

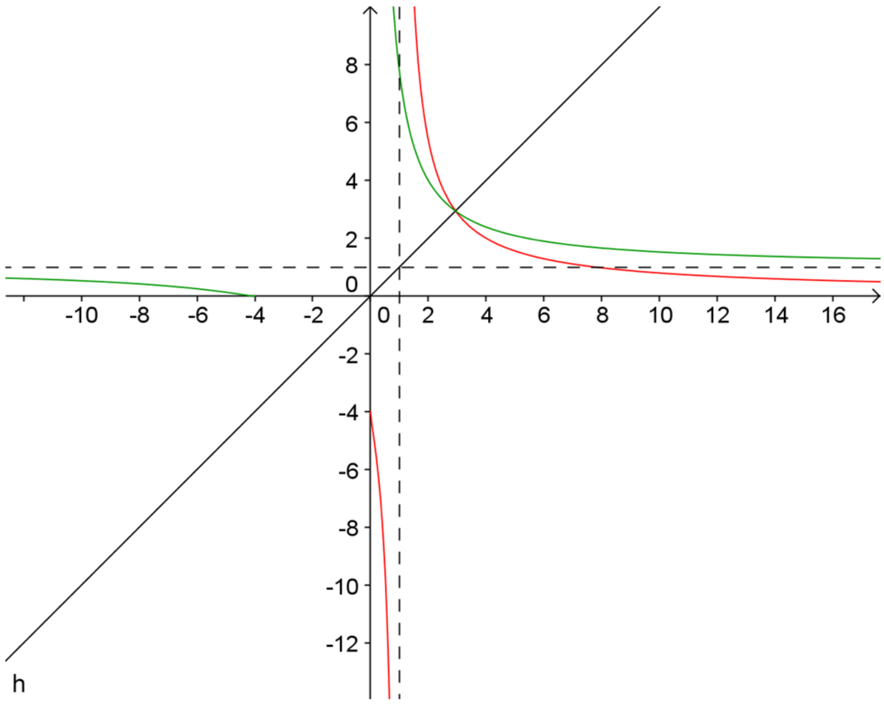
sur $]-\infty;-4[$ :

$$\boxed{f^{-1}(y) = \left(t_1(y)\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{4\,y^2 + 16\,y + 1}}{2\,y}\right)^2}$$

sur $]0;+\infty[$ :

$$\boxed{f^{-1}(y) = \left(t_2(y)\right)^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{4\,y^2 + 16\,y + 1}}{2\,y}\right)^2}$$

Ci-dessous les deux courbes : $y = f(x),\ y = f^{-1}(x)$




Exercice 2 :

On applique deux fois la propriété qui caractérise des combinaisons dans le triangle de Pascal

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k-1}$$

$$= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$$

$$= \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$$

Exercice 3 : Binôme de Newton

$$(x^2-2)^5 =$$

$$(x^2)^5 + 5\,(x^2)^4 \times (-2) + 10\,(x^2)^3 \times (-2)^2 + 10\,(x^2)^2 \times (-2)^3 + 5\,x^2 \times (-2)^4 + (-2)^5$$

$$= x^{10} - 10\,x^8 + 40\,x^6 - 80\,x^4 + 80\,x^2 - 32$$

$$(x^2-3\,x+1)^4 = \left((x^2-3\,x)+1\right)^4$$

$$= (x^2-3\,x)^4 + 4\,(x^2-3\,x)^3 \ + 6\,(x^2-3\,x)^2 \ + 4\,(x^2-3\,x) + 1$$

$$= (x^2)^4 + 4\,(x^2)^3(-3x) + 6\,(x^2)^2\,(-3\,x)^2 + 4\,(x^2)(-3\,x)^3 + (-3\,x)^4$$
$$+ 4\,((x^2)^3 + 3(x^2)^2(-3x) + 3\,x^2\,(-3\,x)^2 + (-3\,x)^3)$$
$$+ 6\,(x^4 - 6\,x^3 + 9\,x^2) + 4\,x^2 - 12\,x + 1$$

$$= x^8 - 12\,x^7 + 54\,x^6 - 108\,x^5 + 81\,x^4 + 4\,x^6 - 36\,x^5 + 108\,x^4 - 108\,x^3 + 6\,x^4$$
$$- 36\,x^3 + 54\,x^2 + 4\,x^2 - 12\,x + 1$$

$$= x^8 - 12\,x^7 + 58\,x^6 - 144\,x^5 + 195\,x^4 - 144\,x^3 + 58\,x^2 - 12\,x + 1$$

Exercice 4 :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{cos\big((k+2)\,\pi\big)}{k+2} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{cos(k\,\pi)}{k} = \sum_{k=2}^{n+2} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\sum_{i=3}^{20} (i-3)^2 = \sum_{i=0}^{17} i^2 = \frac{17 \times 18 \times\ (2 \times 17 + 1)}{6} = 17 \times 3 \times 35 = 1785$$

Voyons cette somme comme celle de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 :

$$\sum_{i=0}^{100} (3\,i + 2) = \frac{(2 + 302) \times 101}{2} = 152 \times 101 = 15\,352$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2\,k+1}}{(2k+1)\,!}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2\,k+1)\,x^{2\,k}}{(2k+1)\,!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2\,k}}{(2k)\,!}$$

$$f''(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\,k)\,x^{2\,k-1}}{(2k)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2\,k-1}}{(2k-1)\,!}$$

$$f'''(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2\,k-1)\,x^{2\,k-1}}{(2k-1)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2\,k-2}}{(2k-2)\,!}$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(2\,k-2)\,x^{2\,k-3}}{(2k-2)\,!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2\,k-3}}{(2k-3)\,!}$$