Contrôle de Mathématiques AI1 –Octobre 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

Exercice 1 : Logique (8 points)

a) Lien logique entre propositions (3,5 points):

En remplaçant le ? par un des connecteurs propositionnels ⇒, ⇐ ou ⇔, relier logiquement les propositions suivantes :

$$"\exists\, x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))" \quad ? \quad "\exists\, x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))"$$

$$"\exists\, x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad ? \quad "(\exists\, x \in E : P(x)) \text{ et } (\exists\, x \in E : Q(x))"$$

$$"(\exists\, x \in E : P(x)) \text{ ou } (\exists\, x \in E : Q(x))" \quad ? \quad "\exists\, x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

$$"\forall\, x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad ? \quad "(\exists\, x \in E : P(x)) \text{ et } (\exists\, x \in E : Q(x))"$$

$$"\forall\, x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad ? \quad "(\forall\, x \in E : P(x)) \text{ et } (\forall\, x \in E : Q(x))"$$

$$"(\forall\, x \in E : P(x)) \text{ ou } (\forall\, x \in E : Q(x))" \quad ? \quad "\forall\, x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

Pour la ligne précédente, montrer par un exemple concret qu'il n'y a pas équivalence entre les propositions.

b) Application (0,5 point)

$P = "\exists\, x \in R : (x > 2 \text{ et } x < 1)"$

$R = "(\exists\, x \in R : x > 2) \text{ et } (\exists\, x \in R : x < 1)"$

Noter que P est fausse et montrer que R est vraie.

c) Ecrire la négation des propositions (3 points):

$A = "\forall\, x \in E\ \forall\, y \in F : x \leq y \text{ ou } x + y = 7)"$

$B = "\forall\, x \in E\ \forall\, y \in E : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)"$

$C = "\forall\, y \in F\ \exists\, x \in E : y = f(x)"$

d) Soit une suite réelle U (1 point)

Ecrire la négation de la proposition suivante traduisant que la suite U tend vers une limite finie L

$D = "\forall\, \epsilon \in]0\,;\, +\infty[: \exists\, m \in N : \forall\, n \in N : n > m \Rightarrow L - \epsilon < U_n < L + \epsilon"$

Exercice 2 : Applications réciproques (6 points)

Soit la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 7}$$

a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité (0,5 point)
b) Calculer la dérivée et les limites aux bornes du domaine de définition (1 point)
c) En déduire le tableau de variation et les applications réciproques que la fonction permet de définir (2 points)
d) Donner l'expression analytique de chaque application réciproque (2,5 points)

Exercice 3 : Sommes (6 points)

Donner une expression simple des sommes suivantes (1,5 point par somme):

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2\,k - 1)^2$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} (x^2 + x)^k$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2} \right) - \sin\left(k\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

Correction

Exercice 1 : Logique (8 points)

a)

$$"\exists\, x \in E :\ (P(x) \text{ ou } Q(x))" \quad \Leftarrow \quad "\exists\, x \in E :\ (P(x) \text{ et } Q(x))"$$

$$"\exists\, x \in E :\ (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad \Rightarrow \quad "(\exists\, x \in E :\ P(x)) \text{ et } (\exists\, x \in E :\ Q(x))"$$

$$"(\exists\, x \in E :\ P(x)) \text{ ou } (\exists\, x \in E :\ Q(x))" \quad \Leftrightarrow \quad "\exists\, x \in E :\ (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

$$"\forall\, x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad \Rightarrow \quad "(\exists\, x \in E :\ P(x)) \text{ et } (\exists\, x \in E :\ Q(x))"$$

$$"\forall\, x \in E : (P(x) \text{ et } Q(x))" \quad \Leftrightarrow \quad "(\forall\, x \in E :\ P(x)) \text{ et } (\forall\, x \in E :\ Q(x))"$$

$$"(\forall\, x \in E :\ P(x)) \text{ ou } (\forall\, x \in E :\ Q(x))" \quad \Rightarrow \quad "\forall\, x \in E : (P(x) \text{ ou } Q(x))"$$

$"(\forall\, x \in \mathbb{R} :\ x = 1) \text{ ou } (\forall\, x \in \mathbb{R} :\ x \neq 1)"$ fausse et $"\forall\, x \in \mathbb{R} : (x = 1 \text{ ou } x \neq 1)"$ vraie

b)

$P = \ "\exists\, x \in R : (x > 2 \text{ et } x < 1)"$ est fausse

$R = \ "(\exists\, x \in R :\ x > 2) \text{ et } (\exists\, x \in R :\ x < 1)"$ est vraie : $x = 3$ rend vraie la première et $x = 0$ rend vraie la seconde

c)

$A = \ "\forall\, x \in E\ \forall\, y \in F :\ x \leq y \text{ ou } x + y = 7)"$

$\overline{A} = \ "\exists\, x \in E\ \exists\, y \in F :\ x > y \text{ et } x + y \neq 7)"$

$B = \ "\forall\, x \in E\ \forall\, y \in E :\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)"$

$\overline{B} = \ "\exists\, x \in E\ \exists\, y \in E :\ x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)"$

$C = \ "\forall\, y \in F\ \exists\, x \in E :\ y = f(x)"$

$C = \ "\exists\, y \in F\ \forall\, x \in E :\ y \neq f(x)"$

D = "$\forall\, \epsilon \in]0\,;\, +\infty[: \exists\, m \in N : \forall\, n \in N : n > m \Rightarrow L - \epsilon < U_n < L+\epsilon$"

$\overline{D}$ = "$\exists\, \epsilon \in]0\,;\, +\infty[: \forall\, m \in N : \exists\, n \in N : n > m$ et $(U_n \leq L - \epsilon$ ou $U_n \geq L+\epsilon)$"

Exercice 2 : Applications réciproques (6 points)

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-7}$$

a)

$D_f = D_{f'} =]-\infty\,;\, 7[\, \cup\,]7\,;\, +\infty[$

b)

$$f'(x) = \frac{2\,x\,(x-7) - 1\,(x^2+3)}{(x-7)^2} = \frac{x^2 - 14\,x - 3}{(x-7)^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x-\infty} f(x) = \lim_{x-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to7^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to7^+} f(x) = +\infty$$

c) Tableau de variations

$f'(x)$ est du signe du trinôme $x^2 - 14\,x - 3$ de discriminant :

$$\Delta = 196 - 4\,(1)(-3) = 196 + 12 = 208 = 16 \times 13$$

et de racines :

$$x_1 = \frac{14 - 4\sqrt{13}}{2} = 7 - 2\sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{14 + 4\sqrt{13}}{2} = 7 + 2\sqrt{13}$$

$$f\left(7 - 2\sqrt{13}\right) = \frac{\left(7 - 2\sqrt{13}\right)^2 + 3}{7 - 2\sqrt{13} - 7} = \frac{49 - 28\sqrt{13} + 52 + 3}{-2\sqrt{13}} = \frac{104 - 28\sqrt{13}}{-2\sqrt{13}} = \frac{-52 + 14\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$$

$f(7-2\sqrt{13}) = 14 - \dfrac{52\sqrt{13}}{13} = 14 - 4\sqrt{13}$

$f(7+2\sqrt{13}) = 14 + 4\sqrt{13}$

x	$-\infty$		$7-2\sqrt{13}$		7		$7+2\sqrt{13}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$14-4\sqrt{13}$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$14+4\sqrt{13}$	$\nearrow$	$+\infty$

f définit donc quatre bijections :

$$\begin{cases} f_1 \;:\;]-\infty\,;\,7-2\sqrt{13}] \;\to\;]-\infty\,;\,14-4\sqrt{13}] \\ \qquad\qquad x \;\to\; y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-7} \\ x = f_1^{-1}(y) \;\leftarrow\; y \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 \;:\; [7-2\sqrt{13}\,;\,7[\;\to\;]-\infty\,;\,14-4\sqrt{13}] \\ \qquad\qquad x \;\to\; y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-7} \\ x = f_2^{-1}(y) \;\leftarrow\; y \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3 \;:\;]7\,;\,7+2\sqrt{13}] \;\to\; [\,14+4\sqrt{13}\,;\,+\infty[\\ \qquad\qquad x \;\to\; y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-7} \\ x = f_3^{-1}(y) \;\leftarrow\; y \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_4 \;:\; [7+2\sqrt{13}\,;\,+\infty[\;\to\; [\,14+4\sqrt{13}\,;\,+\infty[\\ \qquad\qquad x \;\to\; y = f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-7} \\ x = f_4^{-1}(y) \;\leftarrow\; y \end{cases}$$

d) Expression analytique des réciproques

Soit $y \in \left]-\infty\ ;\ 14 - 4\sqrt{13}\right]$ et $x \in \left]-\infty\ ;\ 7\right[$

$$y = \frac{x^2+3}{x-7} \Leftrightarrow y\,(x-7) = x^2+3$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 - y\,x + (7\,y+3)$$

$\Delta(y) = (-\,y)^2 - 4\,(1)\,(7\,y+3) = y^2 - 28\,y - 12 \geq 0$ (d'après tableau de variations)

$$x_1(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 28\,y - 12}}{2}$$

$$x_2(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 28\,y - 12}}{2}$$

$x_1(y) \leq x_2(y)$

Donc :

$$f_1^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 28\,y - 12}}{2}$$

$$f_2^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 28\,y - 12}}{2}$$

Soit $y \in \left[14 + 4\sqrt{13}\ ;\ +\infty\right[$ et $x \in \left]7\ ;\ +\infty\right[$

Le même travail que précédemment conduit à :

$$f_3^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 28\,y - 12}}{2}$$

$$f_4^{-1}(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 28\,y - 12}}{2}$$

<u>Exercice 3 : Sommes (6 points)</u>

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} (2\,k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (4\,k^2 - 4\,k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \frac{4\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6} - \frac{4\,n\,(n+1)}{2} + n = \frac{2\,n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{3} - 2\,n\,(n+1) + n$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} (x^2 + x)^k = \frac{(x^2 + x)^{n+1} - 1}{x^2 + x - 1}$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2} \right) - \sin\left(k\frac{\pi}{2} \right) \right) = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} \right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} \right) = \sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} \right) - 1$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$