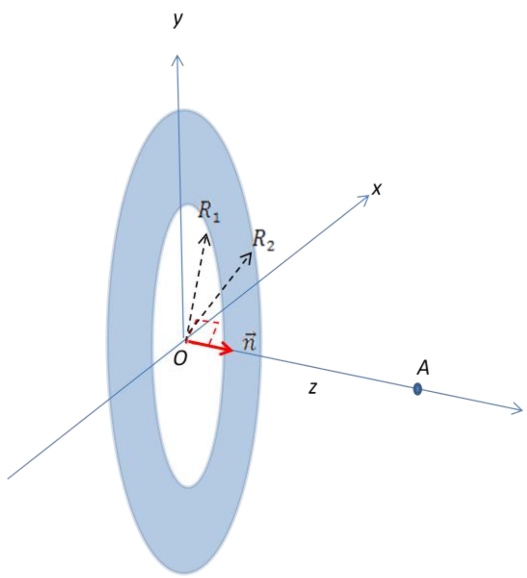
Devoir maison d'électrostatique – 2 Avril 2015

Pour chaque exercice, on donnera une formule littérale en fonction des paramètres de l'exercice puis on effectuera l'application numérique si besoin.

Exercice 1 : Champ créé par un anneau chargé (8 points)

On considère un anneau plat de rayon intérieur $R_1 = 4\,cm$ et extérieur $R_2 = 5\,cm$ uniformément chargé portant la charge Q.



1) Calculer l'aire de cet anneau (0,5 point)
2) En déduire la densité surfacique de charges σ (0,5 point)

On cherche à calculer le champ électrique en un point *A* d'abscisse z > 0 de l'axe de symétrie (O ; $\vec{n}$) de l'anneau. Mais pour cela, afin de simplifier les calculs, on commence par déterminer le potentiel électrostatique *V(z)* en ce point.

3) Que peut-on dire de la direction et du sens du champ électrique sur cet axe ? Justifier (0,5 point)
4) Définir dans le plan de l'anneau un paramétrage convenable d'un point et décrire l'élément différentiel de surface employé (0,5 point)
5) Calculer la contribution élémentaire de l'élément de surface, au potentiel électrostatique (On choisira la constante telle que ce potentiel soit nul à l'infini) (1point)
6) Calculer le potentiel électrostatique en effectuant le calcul intégral sur la surface de l'anneau puis vérifier que la formule redonne celle d'une charge ponctuelle en champ lointain (1 point)
7) En déduire le champ électrique $E_z(z)$ le long de l'axe (z $\geq$ 0 et z < 0) et vérifier la formule en champ lointain (1 point)

8) Faire tendre R_1 vers 0, poser $R_2 = R$ et en déduire les expressions du champ électrique et du potentiel sur un point de l'axe pour un disque de rayon *R*. Vérifier que l'on retrouve la formule donnée en cours au chapitre des condensateurs (1 point)
9) Faire tendre R_1 vers $R_2 = R$ et retrouver les résultats de champ et de potentiel obtenus en cours pour un cercle de rayon *R* (1 point)

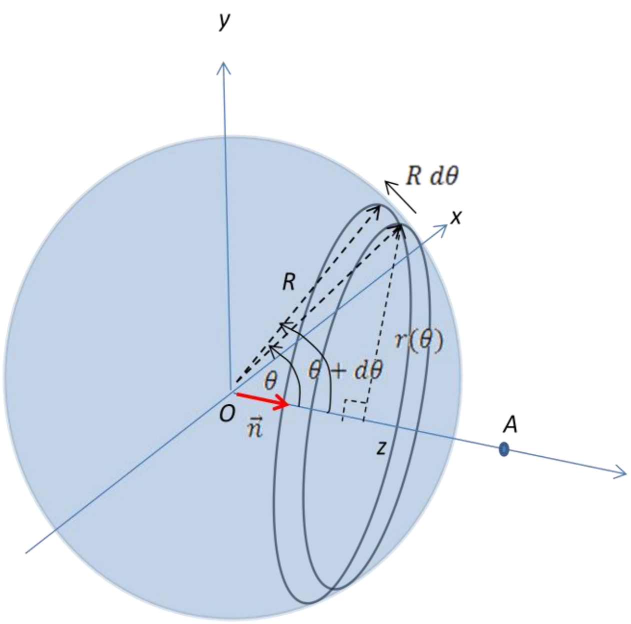
Exercice 2 : Pression électrostatique sur une sphère chargée (12 points)

On considère une sphère de rayon R portant une charge *Q* > 0. Compte tenu de la symétrie, il est logique de penser que cette charge est uniformément répartie sur cette sphère.

On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* de son centre sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On cherche alors à évaluer le champ électrostatique à une distance *z* du centre *O* de la sphère en commençant par évaluer le potentiel électrostatique. On peut alors pour cela diviser la sphère en surfaces élémentaires, en considérant des cercles repérés par un angle θ tels que définis par la figure ci-dessous :



1) Expliquer brièvement pourquoi le potentiel en un point de l'espace *M* ne dépend que de la distance de ce point au centre *O* de la sphère. (0,5 point)
2) Déterminer le rayon $r(\theta)$ d'un cercle en fonction de R et de θ (0,5 point)
3) Déterminer l'aire d^1S de l'élément de surface différentiel situé entre les cercles de rayons $r(\theta)$ et $r(\theta + d\theta)$. (0,5 point)

4) En déduire l'aire *S* de la sphère par calcul intégral (0,5 point)
5) En déduire la densité surfacique de charges σ en fonction de R et Q. (0,5 point)
6) En déduire la charge d^1q portée par l'élément de surface en fonction de *R*, de θ et $d\theta$. (0,5 point)

On définit sur un rayon de la sphère un axe (O ; $\vec{n}$) et on note *V(z)* la valeur du potentiel électrostatique en un point *A* d'abscisse z de cet axe.

7) Calculer le potentiel électrostatique $d^1V(z)$ créé par l'élément de surface en un point d'abscisse z > R puis z < R de l'axe. (0,5 point)
8) En déduire l'expression intégrale du potentiel électrostatique créé par la sphère en ce point. (0,5 point)
9) Par changement de variable adéquat, calculer cette intégrale. En donner une expression unique puis une expression pour $0 \leq z < R$ puis pour $z > R$ (1 point)
10) Que constatez-vous sur la valeur du potentiel à l'intérieur de la sphère ? (0,5 point)
11) En déduire la valeur de la composante $E_z(z)$ du champ électrique sur l'axe (O ; $\vec{n}$) (1 point)
12) Que constatez-vous sur la valeur du champ électrique à l'intérieur de la sphère ? (0,5 point)
13) Retrouver les résultats précédents en utilisant le théorème de Gauss (1 point)
14) Le champ électrique peut il être défini en un point de la sphère $(z = R)$? Et le potentiel ? (0,5 point)
15) Montrer que la discontinuité que subit le champ électrique à la traversée de la sphère (de l'intérieur vers l'extérieur) est : $E_z(R^+) - E_z(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ (0,5 point)

On rappelle (cours sur les condensateurs) l'expression du champ électrique au voisinage du centre d'un disque de rayon R et de normale $\vec{n}$ uniformément chargé avec une densité surfacique σ

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\vec{n}$$

16) En isolant une surface infinitésimale d'aire dS en un point *M* de la surface de la sphère et en l'assimilant à un disque portant une charge $= \sigma\, dS$, déduire de ce qui précède l'expression du champ électrique créé en un point voisin de cette surface par le reste de la sphère. (1 point)
17) En déduire l'intensité *dF* de la force exercée par le reste de la sphère sur le disque infinitésimal, puis la pression électrostatique *dF/* dS. Que va-t-il se passer si la charge de la sphère devient trop importante ? (1 point)
18) <u>Application</u> : Une sphère métallique de rayon $R = 10\ cm$ peut supporter une pression limite interne $p_{lim} = 300\ bars \approx 3 \times 10^7\ Pa$. Exprimer la charge limite Q_{lim} que peut supporter cette sphère en fonction de p_{lim}, *R* et $k = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ (SI)$. Faire l'application numérique (1 point)

CORRECTION

Exercice 1 :

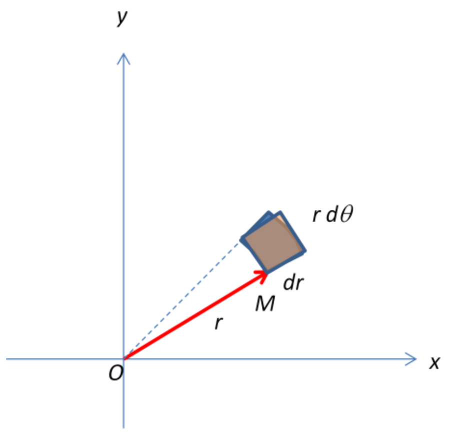
1) Aire = $S = \pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) = \pi\,(5^2 - 4^2) = 9\,\pi\ cm^2 \approx 28{,}3\ cm^2$
2)

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}}$$

3) La distribution de charges est symétrique par rapport à l'axe *(O ; z)* donc :

$$\boxed{\vec{E} = E_z(z)\,\vec{n}}$$

4) Paramétrage d'un élément de surface par ses coordonnées polaires r et θ
   Elément différentiel de surface d'ordre 2 : $d^2S = r\ d\theta\ dr$



Elément différentiel de surface d'ordre 1 : $d^1S = 2\,\pi\,r\ dr$

5)

$$\boxed{d^1V = \frac{\sigma\,d^1S}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0} \times \frac{r\ dr}{\sqrt{r^2 + z^2}}}$$

6)

$$V(z) = \int_{r=R_1}^{r=R_2} d^1V = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left[\sqrt{r^2 + z^2}\right]_{r=R_1}^{r=R_2} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(\sqrt{{R_2}^2 + z^2} - \sqrt{{R_1}^2 + z^2}\right)$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)} \times \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{\sqrt{{R_2}^2 + z^2} + \sqrt{{R_1}^2 + z^2}}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{{R_2}^2 + z^2} + \sqrt{{R_1}^2 + z^2}}}$$

On vérifie pour $z \to \pm\infty$:

$$\boxed{V(z) \approx \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{|z|}}$$

qui est le champ créé par une charge ponctuelle Q placée en O

7)

$$E_z(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times - \frac{\dfrac{z}{\sqrt{{R_2}^2 + z^2}} + \dfrac{z}{\sqrt{{R_1}^2 + z^2}}}{\left(\sqrt{{R_2}^2 + z^2} + \sqrt{{R_1}^2 + z^2}\right)^2}$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{z\left(\sqrt{{R_2}^2 + z^2} + \sqrt{{R_1}^2 + z^2}\right)}{\sqrt{{R_2}^2 + z^2}\,\sqrt{{R_1}^2 + z^2}\,\left(\sqrt{{R_2}^2 + z^2} + \sqrt{{R_1}^2 + z^2}\right)^2}$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{z}{\sqrt{{R_2}^2 + z^2}\,\sqrt{{R_1}^2 + z^2}\,\left(\sqrt{{R_2}^2 + z^2} + \sqrt{{R_1}^2 + z^2}\right)}$$

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{z}{\left({R_2}^2 + z^2\right)\sqrt{{R_1}^2 + z^2} + \left({R_1}^2 + z^2\right)\sqrt{{R_2}^2 + z^2}}}$$

Champ lointain : $z \to \pm\infty$:

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{z^2}}$$

8) $R_1 \to 0\,;\ R_2 = R$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2} + |z|}}$$

$$E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{z}{(R^2 + z^2)\,|z| + z^2\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$si\ z > 0 :\ E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{(R^2 + z^2)\ + z\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Formule vue en cours pour z > 0 :

$$E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2} \times \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2} \times \frac{\sqrt{R^2 + z^2} - z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$= \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2} \times \frac{\sqrt{R^2+z^2} - z}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2} \times \frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}\left(\sqrt{R^2+z^2}+z\right)}$$

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{(R^2+z^2)\ + z\sqrt{R^2+z^2}}}$$

C’est bien la même expression.

9) $R_1 \to R_2 = R$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}}$$

$$\boxed{E_z(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{z}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Exercice 1 :

1) La distribution de la charge est invariante par rotation quelconque autour du point O

2)

$$\boxed{r(\theta) = R\sin(\theta)}$$

3)

$$\boxed{d^1S = 2\,\pi\,r(\theta)\,R\,d\theta = 2\,\pi\,R^2\sin(\theta)\ d\theta}$$

4)

$$S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d^1S = 2\,\pi\,R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin(\theta)\ d\theta = 2\,\pi\,R^2\,[-\cos(\theta)]_0^{\pi}$$

$$\boxed{S = 4\,\pi\,R^2}$$

5)

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\,\pi\,R^2}}$$

6)

$$\boxed{d^1q = \sigma\,d^1S = \frac{Q}{4\,\pi\,R^2} \times 2\,\pi\,R^2\sin(\theta)\ d\theta = \frac{Q}{2}\sin(\theta)\ d\theta}$$

7)

$$d^1V(z) = \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{MA} = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin(\theta)\ d\theta}{\sqrt{(z - R\cos(\theta))^2 + (R\sin(\theta))^2}}$$

$$\boxed{d^1V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{\sin(\theta)\ d\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2\,z\,R\cos(\theta)}}}$$

8)

$$V(z) = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d^1V\,(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\sin(\theta)\ d\theta}{\sqrt{z^2+R^2-2\,z\,R\cos(\theta)}}$$

9) On fait le changement de variable :

$$u = z^2 + R^2 - 2\,z\,R\cos(\theta)$$
$$du = 2\,z\,R\sin(\theta)\,d\theta$$

$$V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{z\,R}\int_{u=z^2+R^2-2\,z}^{u=z^2+R^2+2z} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{z\,R}\left[\sqrt{u}\right]_{(z-R)^2}^{(z+R)^2}$$

$$V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{|z+R| - |z-R|}{z\,R}$$

$$si\ 0 \leq z \leq R:\ V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\ ;\ E_z(z) = 0$$
$$si\ z > R:\ V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,z}\ ;\ E_z(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,z^2}$$

10) Le potentiel est constant à l'intérieur de la sphère

11)

$$si\ 0 \leq z \leq R:\ E_z(z) = -\frac{dV}{dz} = 0$$
$$si\ z > R:\quad E_z(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,z^2}$$

12) Le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère

13) En prenant le flux du champ électrique à travers une sphère de rayon z nous avons :

$$4\,\pi\,z^2\,E_z(z) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

où Q_{int} désigne la charge située à l'intérieur de cette sphère.

$$si\ 0 \leq z \leq R:\ Q_{int} = 0\ et\ E_z(z) = 0$$

$$si\ z > R:\ Q_{int} = Q\ \ et\ E_z(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,z^2}$$

14) Le champ électrique ne peut pas être défini en un point de la sphère, il subit une discontinuité à la traversée de la sphère. Le potentiel peut être par contre défini par sa valeur limite, soit $V(R) = \lim_{z \to R} V(z)$. Il est donc continu.

15) La discontinuité du champ électrique à la traversée de la sphère est :

$$E_z(R^+) - E_z(R^-) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0\,S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

16) Le champ électrique total $\vec{E}$ en un point infiniment voisin d'un point M de la sphère se décompose en deux champs, un champ $\vec{E}_{dS}$ créé par l'élément de surface et un

champ $\vec{E}_{reste}$ créé la surface restante de la sphère. Or $\vec{E}_{dS}$ est le champ créé par un disque uniformément chargé au voisinage de son centre, donc :

$$\vec{E}_{dS} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}$$

Et :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\vec{n}$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{E}_{dS} = \vec{E}_{reste} = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{n}}$$

17) L'élément de surface dS est donc soumis à une force électrostatique $\overrightarrow{df}$:

$$\overrightarrow{df} = \sigma\,dS\,\vec{E}_{reste} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0}\,dS\,\vec{n}$$

Donc à une pression électrostatique :

$$p = \frac{\|\overrightarrow{df}\|}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\,\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\,\pi^2\,\varepsilon_0\,R^4} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{Q^2}{8\,\pi\,R^4} = \frac{k\,Q^2}{8\,\pi\,R^4}$$

18) Application :

$$Q^2 = \frac{8\,\pi\,p\,R^4}{k}$$

Charge limite :

$$\boxed{Q_{lim} = \sqrt{\frac{8\,\pi\,p_{lim}\,R^4}{k}} = \sqrt{\frac{8\,\pi\,\times 3 \times\,10^7 \times 10^{-4}}{9 \times 10^9}} \approx 29 \times 10^{-4}\,C = 2{,}9\,mC}$$