DEVOIR MAISON – AI3 – 2021

(Enseignant : L. Gry)

<u>Problème</u> 1 (10 points) :

Nicolas et Yann ont revendu leur hélicoptère et se sont racheté une montgolfière, en faisant au passage, un beau bénéfice, à la fois financier et écologique, ceci afin d'admirer ce qu'il reste encore de beau à admirer sur notre bonne vieille Terre et inviter par des reportages et des photos, leurs congénères « addict » à la fée pétrole à revoir rapidement leurs moyens de déplacement terrestre, faute de quoi ces derniers risqueraient d'accélérer leur déplacement céleste dans des jours pas si lointains que cela (au passage, merci les gars pour votre job !).

Par un beau temps de printemps, les deux compères s'envolent, enfin…, disons, décollent pour être plus justes, en direction du firmament, afin de survoler notre joyau national (Cororico !!) , les châteaux de la Loire.

La température extérieure est de 20 degrés au sol et la pression de 1 bar. Le ballon enferme un volume d'air de 1200 m^3. La Montgolfière, passagers, cochon (oui, ils emmènent un cochon, l'animal de compagnie de Nicolas) et nacelle comprise a une masse de 400 kg.

Vont-ils réussir à décoller ou faudra-t-il jeter le cochon par-dessus bord et la gourmette en argent massif de Yann, celle qu'il avait reçue à sa première communion de sa grande tante Adèle ?

Votre mission, si vous l'acceptez, consistera à élucider cette question.

<u>Questions</u>

1) Votre avis brut de pilier de café du commerce sur la question (0 point)

a) Non, ils n'arriveront pas à décoller, il faut balancer le cochon

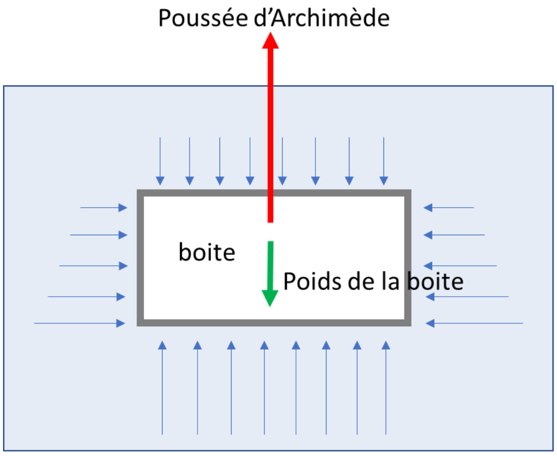
b) Si, ils vont y arriver, à condition de griller un peu d'essence

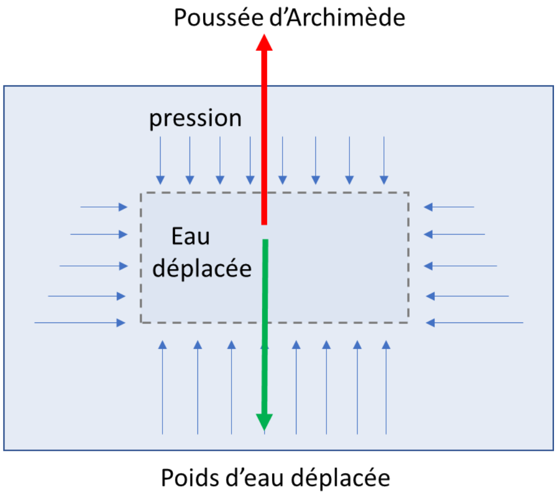
Pour ceux qui ont répondu b) rendez-vous directement à la question 2), pour les autres, je vais vous faire rencontrer un vieux pote qui s'appelle Archimède. Faut pas pousser, tout de même !!!

Mon pote, Archimède, Dédé de Syracuse, c'est comme ça qu'il se fait appeler le bougre, est plus porté sur le ballon de rouge que sur celui de Montgolfière mais il a des idées claires, quand il n'a pas abusé du premier ballon, cela s'entend. Je le chope donc un matin à jeun, au réveil pour requérir ses lumières sur le ballon de Montgolfière avant qu'il ne remplisse l'autre ballon de verre, qui trône sur la table de son salon, encore tout auréolé des libations de la veille. Et il m'explique sobrement :

- La Montgolfière, elle a déplacé de l'air, Hic !, comme certains hommes politiques. Cet air, il était en équilibre, juste avant qu'elle ne lui prenne sa place.

- C'est vrai qu'elle ne manque pas d'air cette montgolfière, lui réponds-je (Ca fait un peu éponge, je lui réponds, serait plus correct musicalement)
- Et si cet air, il s'écrabouillait pas sur le sol, c'est qu'une force l'en empêchait
- Ah oui ? Quelle force
- Une force qui le retient, verticale, dirigée vers le ciel, une force que j'ai appelée poussée de moi.
- Poussée de toi ?
- Bah, poussée d'Archimède, cornichon !
- Ah oui j'suis bête. Tu peux détailler un peu plus ?
- Mouais ! Imagine une boite vide et fermée en métal pour simplifier et plonge-la dans de l'eau. Elle remonte.
- Ah ouais ! Mais pourquoi ?
- Bah c'est simple, pique un plongeon à trois mètres et tu verras ce que vont s'prendre tes portugaises !
- Bah oui, y 'a plus de pression au fond.
- C'est ça, mon gars et là, la boite c'est pareil, sur le haut y'a moins de pression qu'en dessous, du coup ça fait une force qui la pousse vers le haut et la fait remonter.
- Ah ouais, trop top, je kiffe grave
- Tu parles comme les jeunes maintenant ?
- Désolé, attends, moi j'aime bien faire des schémas pour comprendre. Tu sais, moi je ne lis pas la vérité dans le ballon, comme toi et puis faut que j'explique ça à mes étudiants et qu'ça fasse sérieux. C'est dans une école d'ingénieur que j'enseigne, pas dans un bistrot.





3) L'air étant considéré comme un gaz parfait, on note ρ sa masse volumique quand il est à une température T et à une pression P et ρ_0 sa masse volumique quand il est à une température de référence T_0 et à une pression de référence P_0.

Exprimer ρ en fonction de ρ_0, P, T, P_0, T_0.

4) Nicolas ayant brûlé un peu d'essence pour réchauffer l'air emprisonné par le ballon de la montgolfière, cette dernière a fini par décoller et se trouve en équilibre, juste au ras du sol.

- Faire un bilan des actions mécanique agissant sur cette dernière et les faire apparaitre sur un schéma

-Donner une expression littérale de ces actions mécaniques en prenant comme symboles :

ρ = masse volumique de l'air extérieur à la montgolfière

T = Température de l'air extérieur à la montgolfière

ρ' = masse volumique de l'air emprisonné par la montgolfière

T' = Température de l'air emprisonné par la montgolfière

V_0 = volume d'air emprisonné dans le ballon de la montgolfière

g = accélération de la pesanteur à la surface de la Terre

M_0 = masse de la montgolfière, équipage et équipement compris, ballon dégonflé.

5) En appliquant le principe de l'équilibre (première loi de Newton), montrer que l'on a :

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \frac{M_0\, P_0}{\rho_0\, V_0\, T_0\, P}$$

6) Donner la valeur de T' en prenant :

$$M_0 = 400\ kg, \qquad T = T_0\ \ , P = P_0$$

On estimera ρ_0 en justifiant son calcul

7) Combien le chauffage de l'air a-t-il libéré de grammes de CO_2 dans l'environnement ?

Donnée : Le pouvoir calorifique de l'essence est de $44\ MJ\ kg^{-1}$

Problème 2 : Modélisation de l'atmosphère terrestre (10 points)

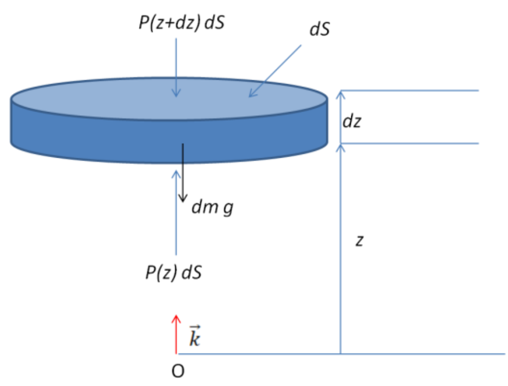
1) Masse molaire de l'air

Estimer la masse molaire de l'air en considérant qu'il est constitué de 80 % de diazote et de 20 % de dioxygène.

Rappel : $M(N) = 14\ g\ mol^{-1}$, $M(0) = 16\ g\ mol^{-1}$

2) Equation différentielle locale

En faisant un bilan de forces sur un cylindre infinitésimal de surface dS et d'épaisseur dz (voir figure ci-dessous), établir l'équation différentielle vérifiée par la pression en fonction de l'altitude z et de la masse volumique de l'air ρ.



En considérant l'air comme un gaz parfait, exprimer, à partir de l'équation d'état du gaz, appliquée au cylindre précédent, la masse volumique ρ de l'air en fonction de la pression P, de la température absolue T, de la masse molaire de l'air M et de la constante des gaz parfaits R. En déduire que l'équation différentielle de la pression est :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M\,P}{R\,T}\,g$$

Préciser les unités de chaque grandeur.

Donnée : $g = 9{,}81\;m\,s^{-2}$

3) Modélisation de la troposphère

La troposphère est la partie de l'atmosphère située entre la surface de la Terre (altitude 0) et la surface d'altitude $11\,000\;m$. On sait, par des mesures effectuées avec des ballon-sonde ou bien ne serait-ce qu'en prenant un avion de ligne, que la température décroît en s'élevant dans la troposphère.

A supposer que la température au sol soit de $15°\mathrm{C}$ et que la tablette d'un avion affiche une température extérieure de $-50°\mathrm{C}$ à une altitude de $10\,000\;m$, modéliser la courbe de température dans la troposphère en supposant qu'elle est une fonction affine de l'altitude, donc de la forme :

$$T = a - b\,z \qquad (T \text{ en } Kelvin, z \text{ en } mètre)$$

On précisera donc les valeurs de a et b ainsi que leurs unités.

Résoudre alors l'équation différentielle de la pression, en notant P_0 la pression à l'altitude 0

En déduire (en atm) la valeur de la pression notée P_S à l'altitude de $11\,000\;m$ (frontière entre la troposphère et la stratosphère) et de la pression $P(5000)$ à l'altitude de $5\,000\;m$

Données :

$$P_0 = 1\;atm, \qquad R = 8{,}31\;J\,K^{-1}mol^{-1}, \qquad T(K) = t(°\mathrm{C}) + 273$$

4) Modélisation du début de la stratosphère

Nous supposerons que la stratosphère, dans sa partie initiale allant de $11\,000\;m$ à $25\,000\;m$, peut être, de façon simplifiée, modélisée par une couche isotherme.

Résoudre l'équation différentielle de la pression dans ces conditions. On notera T_S la température à l'altitude de $11\,000\;m$ et on exprimera la pression (en atm) en fonction des valeurs initiales P_S, T_S et des autres paramètres M, g, R, z et on précisera la valeur de T_S.

Correction

Problème 1

1) b)

3) On a pour un gaz parfait :

$$P\ V = n\ R\ T$$

Et :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n\ M}{V} = \frac{P\ M}{R\ T}$$

De même :

$$\rho_0 = \frac{P_0\ M}{R\ T_0}$$

Donc, par division :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P\ T_0}{P_0\ T}$$

Soit :

$$\boxed{\rho = \rho_0 \frac{P\ T_0}{P_0\ T}}$$

4) Actions mécaniques :

Le poids de la Montgolfière, nacelle et air emprisonné compris :

$$\vec{P} = (M_0 + \rho'\ V_0)\ \vec{g}$$

La poussée d'Archimède :

$$\vec{\pi} = -\rho\ V_0\ \vec{g}$$

5) La condition limite de décollage est :

$$\vec{P} + \vec{\pi} = \vec{0}$$

Soit :

$$M_0 + \rho'\ V_0 = \rho\ V_0$$

Ce qui traduit que la masse de la montgolfière, nacelle et air emprisonné compris est égale à la masse d'air déplacée.

Cela donne :

$$\rho - \rho' = \frac{M_0}{V_0}$$

$$\rho_0 \frac{P\, T_0}{P_0\, T} - \rho_0 \frac{P\, T_0}{P_0\, T'} = \frac{M_0}{V_0}$$

Soit :

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} = \frac{M_0\, P_0}{\rho_0\, V_0\, T_0\, P}$$

6)

Estimation de ρ_0 :

Le volume molaire à 20°C est $V_m = 24\ L/mol$ et la masse molaire de l'air peut s'estimer en considérant ce dernier formé de 80% de diazote et de 20 % de dioxygène :

$$M = 0{,}8\ \times M(N_2) + 0{,}2\ \times M(O_2) \approx 29\ g/mol$$

et donc :

$$\rho_0 = \frac{P_0\, M}{R\, T} = \frac{10^5 \times 29}{8{,}31 \times 293} \approx 1{,}2\ kg/m^3$$

Ainsi :

$$\frac{1}{T'} = \frac{1}{T_0}\left(1 - \frac{M_0}{\rho_0\, V_0}\right) = \frac{1}{293}\left(1 - \frac{400}{1{,}2 \times 1200}\right) = \frac{1}{293} \times \frac{2{,}6}{3{,}6}$$

$$T' = \frac{293 \times 3{,}6}{2{,}6} \approx 406\ K$$

7)

L'échange de chaleur élémentaire de l'air emprisonné de masse $m(t)$ et de capacité thermique massique à pression constante c_P, est, entre les instants t et $t + dt$, pour une température ayant varié de dT :

$$\delta Q = m(t)\, c_P\, dT = \rho(t)\, V_0\, c_P\, dT = \frac{P_0\, M}{R\, T}\, V_0\, c_P\, dT$$

D'où par intégration, la chaleur totale échangée :

$$Q = \int_{T_0}^{T'} \frac{P_0\, M\, V_0\, c_P}{R} \frac{dT}{T} = \frac{P_0\, M\, V_0\, c_P}{R}\ Ln\left(\frac{T'}{T_0}\right)$$

Or :

$$M\, c_P = \frac{\gamma\, R}{\gamma - 1}$$

Donc :

$$Q = \frac{\gamma\, P_0\, V_0}{\gamma - 1}\ Ln\left(\frac{T'}{T_0}\right)$$

Soit numériquement :

$$Q = \frac{1,4 \times 10^5 \times 1200}{0,4} Ln\left(\frac{406}{293}\right)$$

$$Q = 134\ MJ$$

Sachant qu'un kilogramme d'essence, soit près d'un litre fournit 44 MJ, il faut donc environ 3 L d'essence.

Problème 2 :

1) Masse molaire de l'air

$$M \approx 0,8 \times 28 + 0,2 \times 32 \approx 29\ g\ mol^{-1}$$

2) Equation différentielle de la pression

La loi de Newton, appliquée au cylindre de surface de base dS et de hauteur dz s'écrit, en projection sur un axe vertical (O, z) de vecteur unitaire $\vec{k}$ dirigé vers le haut.

$$P(z)\ dS - P(z + dz)\ dS - \rho\ dV\ g = 0$$

avec :

$$dV = dS\ dz$$

On en tire :

$$\frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} = -\rho\ g$$

soit :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho\ g}$$

Loi des gaz parfaits

L'air étant considéré comme un gaz parfait, pour le cylindre précédent de masse dm, de volume dV et contenant dn moles, nous avons :

$$P\ dV = dn\ R\ T$$

avec :

$$dn = \frac{dm}{M} = \frac{\rho\, dV}{M}$$

Ainsi :

$$P\, dV = \frac{\rho\, dV}{M}\, R\, T$$

soit :

$$\boxed{\rho = \frac{M\, P}{R\, T}}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\frac{M\, P}{R\, T}\, g}$$

Unités :

P en atm, R en $J\, K^{-1} mol^{-1}$, T en K , M en $kg\, mol^{-1}$, g en $m\, s^{-2}$

Remarques :

L'unité choisie pour la pression (atm) n'est pas l'unité internationale qui est le Pascal. On rappelle : $1\, atm = 101\,325\, Pa$

La valeur de la masse molaire de l'air compatible avec la formule est :

$$M = 29 \times 10^{-3}\, kg\, mol^{-1}$$

3) Modélisation de la troposphère

$$T = a - b\, z$$

Or nous avons, pour $z = 0\, m$, $T = 288\, K$ donc :

$$\boxed{a = 288\, (K)}$$

D'autre part, pour ce qui est des variations :

$$\Delta T = -b\, \Delta z$$

Donc :

$$\boxed{b = -\frac{\Delta T}{\Delta z} = -\frac{223 - 288}{10\,000} = \frac{65}{10\,000} = 6{,}5 \times 10^{-3}\, K\, m^{-1}}$$

Résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M\, P}{R\, (a - b\, z)}\, g$$

Par séparation de variables, on obtient :

$$\frac{dP}{P} = \frac{M\,g}{R\,b} \times \frac{-\,b\,dz}{a - b\,z}$$

et par intégration :

$$Ln(P) = \frac{M\,g}{R\,b}\,Ln(a - b\,z) + c$$

La constante d'intégration c s'obtient par condition initiale, en faisant $z = 0$ dans l'équation :

$$Ln(P_0) = \frac{M\,g}{R\,b}\,Ln(a) + c$$

Par différence avec l'équation précédente, on en déduit :

$$Ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M\,g}{R\,b}\,Ln\left(\frac{a - b\,z}{a}\right)$$

d'où :

$$\boxed{P = P_0\left(\frac{a - b\,z}{a}\right)^{\frac{M\,g}{R\,b}}}$$

<u>Application numérique</u> :

$$P_S = P(11\,000) = 1\,\left(\frac{288 - 6{,}5 \times 10^{-3} \times 11\,000}{288}\right)^{\frac{29\times10^{-3}\times 9{,}91}{8{,}31\times 6{,}5\times10^{-3}}} \approx 0{,}22\ atm$$

$$P(5\,000) = 1\,\left(\frac{288 - 6{,}5 \times 10^{-3} \times 5\,000}{288}\right)^{\frac{29\times10^{-3}\times 9{,}91}{8{,}31\times 6{,}5\times10^{-3}}} \approx 0{,}53\ atm$$

Nous voyons au passage, avec ce modèle, que la pression en haut du Mont-Blanc ($4\,809\ m$) est donc environ la moitié de celle au niveau de la mer.

1) <u>Modélisation de la stratosphère</u>

On prend pour modèle :

$$T = T_S = 288 - 6{,}5 \times 10^{-3} \times 11\,000 = 216{,}5\ K$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M\,P}{R\,T_S}\,g$$

Soit, par séparation de variables :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M\ g}{R\ T_S}\ dz$$

et par intégration :

$$Ln(P) = \frac{M\ g}{R\ T_S}\ z + c$$

La constante d'intégration c s'obtient par condition initiale, en faisant $z = 11\ 000$ dans l'équation :

$$Ln(P_S) = \frac{M\ g}{R\ T_S} \times 11\ 000 + c$$

Par différence avec l'équation précédente, on en déduit :

$$Ln\left(\frac{P}{P_S}\right) = \frac{M\ g}{R\ T_S}\ (z - 11\ 000)$$

D'où :

$$\boxed{P = P_S\ e^{\frac{M\ g}{R\ T_S}(z-11\ 000)}}$$