

Pompe à chaleur (extrait du sujet de Polytechnique 2012)

La pompe à chaleur est un dispositif qui, en mode "chauffage" puise l'énergie thermique dans l'air, dans le sol ou dans l'eau des nappes phréatiques, pour la transférer vers le local à réchauffer. Elle est constituée d'un circuit fermé dans lequel circule un fluide caloporteur à l'état liquide, gazeux ou biphasé selon les éléments qu'il traverse. La circulation se fait en régime permanent; on néglige les variations d'énergies cinétique et de pesanteur.

Les deux parties sont indépendantes et traitent successivement de la thermodynamique de la pompe à chaleur et d'une étude mécanique du compresseur

1 Thermodynamique de la pompe à chaleur

1.1 Diagramme de Mollier

Le diagramme de Mollier (figure 1) représente le logarithme de la pression P en fonction de l'enthalpie massique h du fluide caloporteur et permet ainsi de représenter l'évolution de l'état thermodynamique du fluide au cours du cycle de la pompe à chaleur.

1. Montrer qu'à pression constante, la température T est une fonction croissante de h . Est-elle strictement croissante?
2. Comment lit-on sur ce diagramme ce qui se nommait autrefois la chaleur latente massique de vaporisation à la pression P ?
3. Cette question concerne les courbes isothermes dans le diagramme de Mollier.

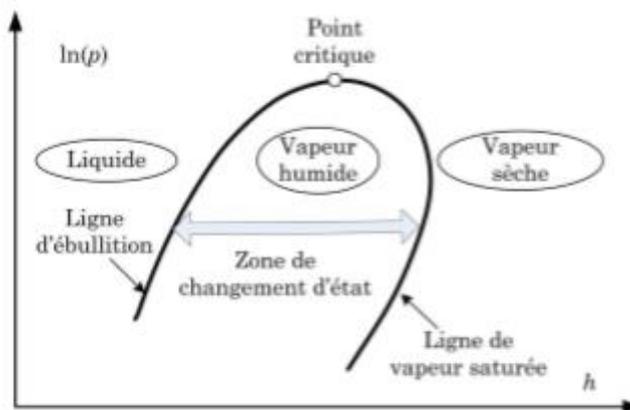


FIG. 1: Diagramme de Mollier simplifié.

- a) Quelle est a priori leur allure pour la phase liquide, supposée incompressible et indilatable?
 - b) Quelle est a priori leur allure pour la phase gazeuse, modélisée comme un gaz parfait?
 - c) Quelle est a priori leur allure dans la zone de changement d'état?
4. Rappeler l'expression de la différentielle de l'enthalpie massique h , considérée comme fonction de l'entropie massique s et de la pression P . On notera v le volume massique.
 5. Montrer que, dans le diagramme de Mollier, la pente des courbes isentropiques est positive.

6. Montrer que, sur une courbe isenthalpique du diagramme de Mollier, l'entropie est une fonction décroissante de la pression.

7. On note h_A et h_B les enthalpies massiques du fluide aux points A et B du circuit. Le fluide reçoit d'une part le travail massique utile, fourni par le compresseur, w (et qui ne comprend donc pas le travail des forces de pression nécessaire pour faire entrer et sortir le fluide du volume de contrôle), d'autre part l'énergie thermique q . Montrer que $h_B - h_A = w + q$.

1.2 Cycle de la pompe à chaleur

Le cycle de la pompe à chaleur se compose de quatre étapes (figure 2), en dehors desquelles les échanges thermiques ou mécaniques sont supposés nuls :

– Compression : le gaz subit une compression adiabatique et réversible qui l'amène de l'état 1 (P_1, T_1) à l'état 2 (P_2, T_2). On note w le travail massique reçu par le fluide.

– Condensation : le gaz se liquéfie totalement à pression constante P_2 jusqu'à la température T_3 . Il cède de l'énergie à la source chaude, et l'on note $q_{23} < 0$ l'énergie massique échangée.

– Détente : le fluide traverse un tuyau indéformable et ne permettant pas les échanges thermiques. La pression du fluide redescend jusqu'à P_1 et sa température vaut alors T_4 .

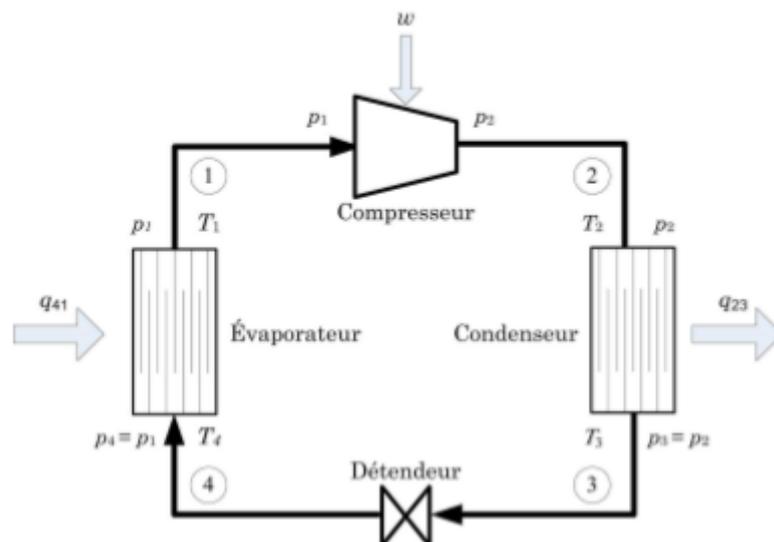


Fig. 2: Cycle frigorifique d'une pompe à chaleur; les flèches épaisses indiquent le sens des transferts énergétiques.

– Évaporation : le liquide s'évapore totalement à pression constante P_1 jusqu'à la température T_1 . Il reçoit l'énergie massique $q_{41} > 0$ de la source froide.

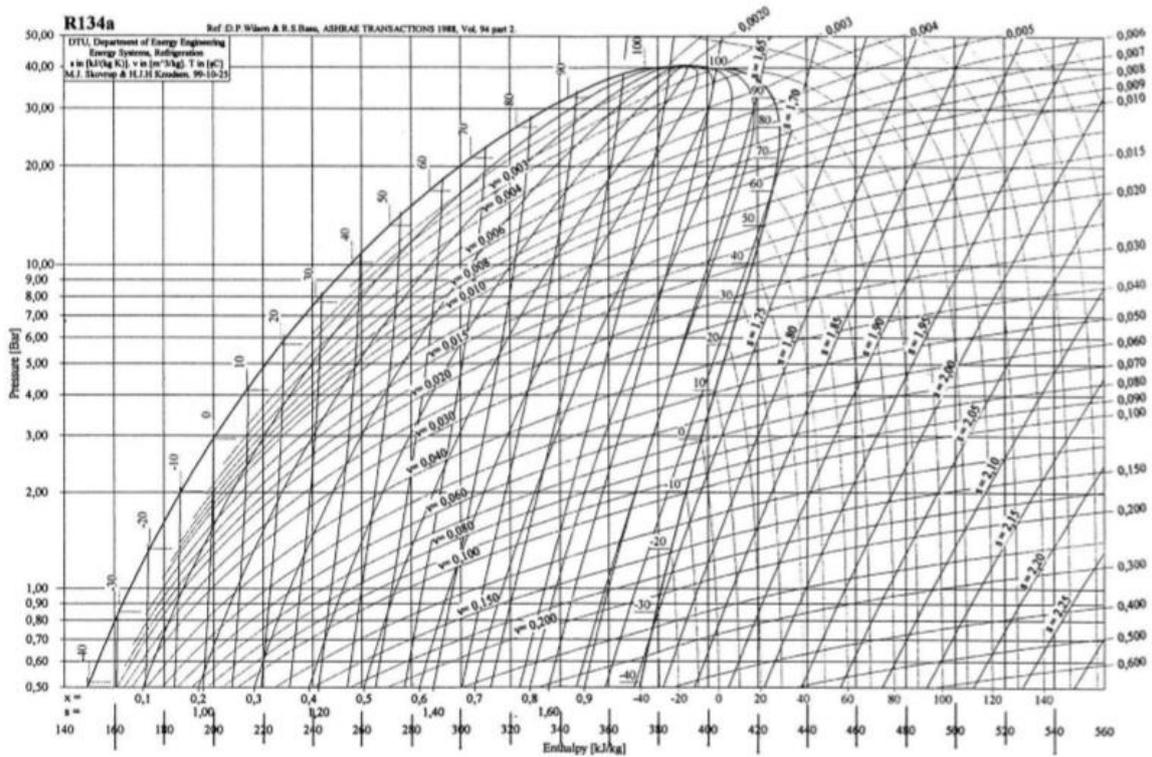
8. Montrer que la phase de détente est isenthalpique.

9. Représenter sur un diagramme de Mollier ($\ln(P), h$) les quatre étapes du cycle, ainsi que les quantités q_{23} , q_{41} et w .

10. Quelle est relation liant les quantités q_{23} , q_{41} et w ? Représenter ces quantités sur le schéma de la question 9.

11. Justifier la définition de l'efficacité de la pompe à chaleur $\eta = -q_{23}/w$ et montrer que $\eta > 1$.

12. Le Document suivant représente le diagramme de Mollier d'un fluide caloporteur courant. Dans la perspective de vos réponses à la question 3, la phase liquide y apparaît-elle incompressible et indilatable? La phase gazeuse y apparaît-elle comme un gaz parfait?



13. On donne $P_1 = 0,3 \text{ MPa}$, $P_2 = 1 \text{ MPa}$, $T_1 = 5 \text{ °C}$ et $T_3 = 0 \text{ °C}$. Représenter le cycle correspondant sur le Document précédent, à rendre avec votre copie. Pour chacun des points 1 à 4 du cycle, indiquer dans un tableau les valeurs numériques respectives de l'enthalpie massique, la pression et la température. Indiquer aussi l'état du fluide en chacun de ces points.

14. À partir du diagramme de Mollier, estimer numériquement l'efficacité de la pompe à chaleur. Comparer la valeur trouvée à celle qui correspondrait à un cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures.

15. Calculer le débit massique du fluide permettant d'assurer une puissance de chauffage de 4 kW.

1.3 Cycle du compresseur

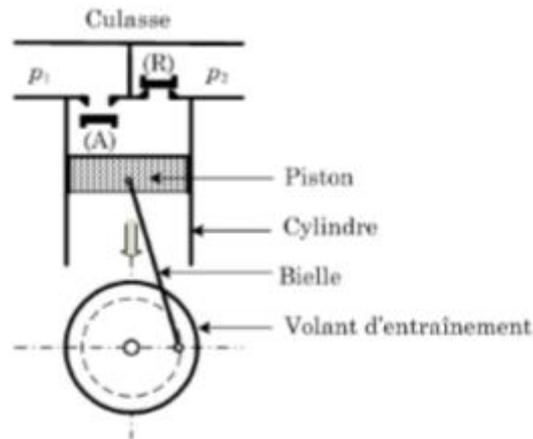


Fig. 3: Schéma de principe d'un compresseur (ici, en phase d'aspiration). Les éléments constitutifs sont le cylindre, le piston, le clapet d'aspiration (A), le clapet de refoulement (R), la bielle et le volant.

Le compresseur, supposé parfaitement calorifugé, assure la circulation du fluide caloporteur entre les circuits basse pression et haute pression (figure 3). Le cycle du compresseur, supposé réversible, s'effectue en trois temps :

- Aspiration : Le clapet (A) est ouvert et le clapet (R) fermé. Le piston, de section S , descend, le fluide pénètre dans le cylindre.
- Compression : Les deux clapets sont fermés. Le piston monte. La pression du fluide augmente.
- Refoulement : Lorsque la pression dans le cylindre atteint la pression P_2 , (R) s'ouvre et le fluide est évacué sous la pression P_2 , jusqu'au moment où le piston atteint la fin de sa course. On suppose alors qu'il n'y a plus de fluide dans le cylindre (le volume dit mort est nul). Puis, le clapet de refoulement se ferme et un nouveau cycle commence. On suppose que la fermeture de (R), l'ouverture de (A) et la chute de la pression de P_2 à P_1 sont instantanées et simultanées.

16. En notant v_1 et v_2 les volumes massiques au début et à la fin de la phase de compression, représenter dans un diagramme (p, v) les trois phases de fonctionnement du compresseur.

17. Comment détermine-t-on, sur ce diagramme, le travail massique fourni au cours d'un cycle?

18. La phase de compression est isentropique; le fluide est considéré comme un gaz parfait dont les capacités calorifiques massiques isobare c_p et isochore c_v sont constantes. Déterminer le travail reçu par ce fluide pour un aller-retour du piston en fonction de P_1, v_1, P_2, v_2 et de $\gamma = c_p/c_v$.

19. On donne $P_1 = 0,3 \text{ MPa}$, $P_2 = 1 \text{ MPa}$, $T_1 = 5 \text{ °C}$ et $\gamma = c_p/c_v = 1,12$. Calculer T_2 . Comparer avec la valeur déterminée graphiquement à la question 13.

Correction

1)

1.1) Diagramme de Mollier

1. A l'état liquide ou gazeux, on a, en notant c_p la capacité thermique massique à pression constante :

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = c_p$$

Donc :

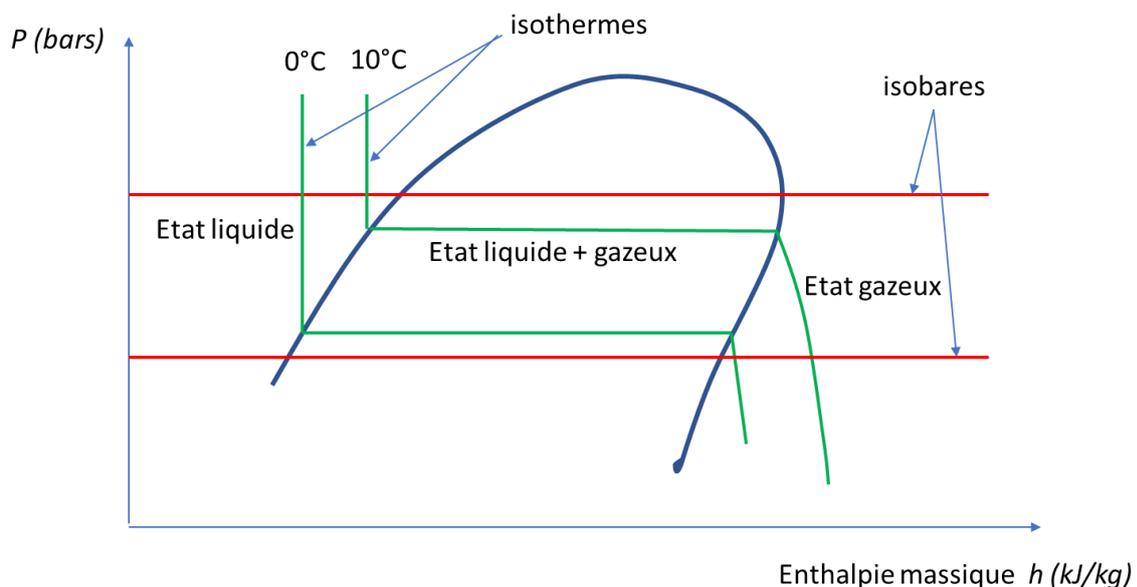
$$\left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_P = \frac{1}{c_p} > 0$$

Donc, à pression constante, T est fonction strictement croissante de h .

A l'état biphasé, liquide plus gaz, la température et la pression restent constantes pendant le changement d'état et, en notant L la chaleur latente massique de vaporisation, dh la variation d'enthalpie du fluide lors de la vaporisation d'une masse dm de liquide, on a :

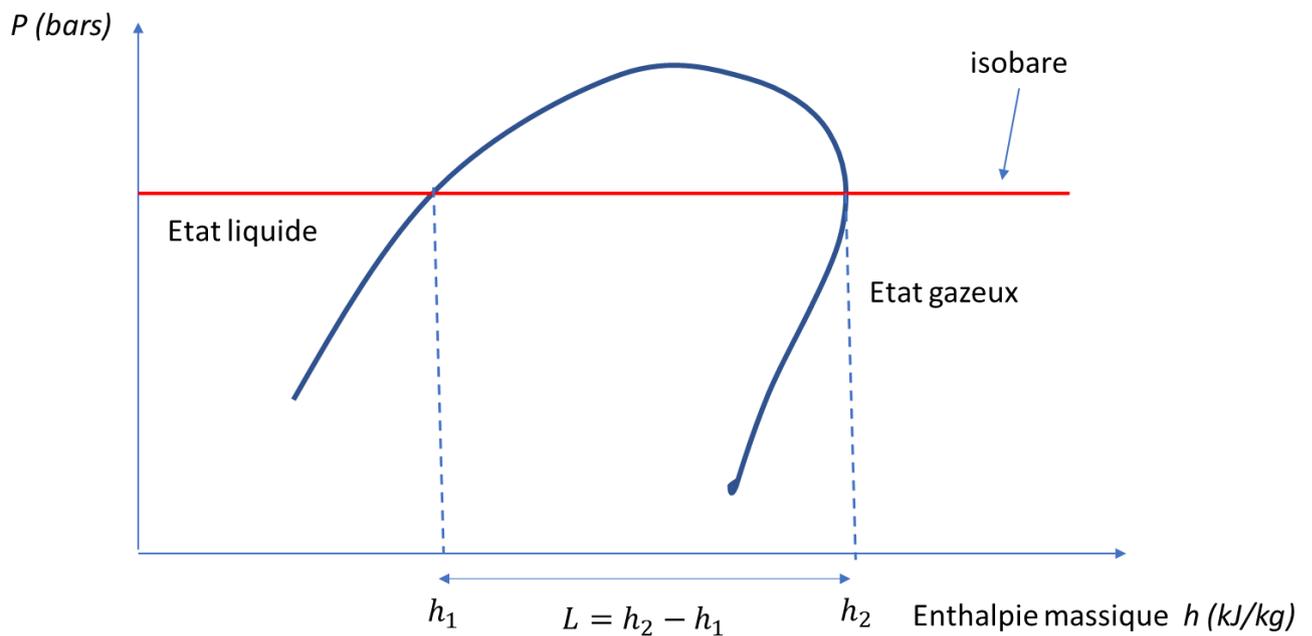
$$dh = L dm > 0$$

Donc, au cours de la vaporisation, l'enthalpie massique augmente tandis que la température et la pression restent constante. La courbe isotherme est donc une portion de droite horizontale.



A noter que les courbes isobares, qui sont dans le diagramme de Mollier, des segments de droite horizontaux, coupent les isothermes quasiment à angle droit dans les domaines liquides et gazeux. L'explication est donnée en 3.

2. La chaleur latente massique de vaporisation à une pression donnée P se lit sur le diagramme de Mollier comme étant la longueur (variation d'enthalpie massique) du segment de changement d'état à cette pression, qui est la portion d'isobare située sous la courbe de changement d'état.



3.

a) Allure des isothermes en phase liquide.

L'enthalpie massique d'un liquide comme d'un gaz dépend de façon générale de la température et de la pression mais pour un liquide, la dépendance à la pression est très faible et dans le modèle idéal d'un fluide incompressible et indilatable, elle ne dépend pas de la pression. Ceci explique l'allure quasi verticale des isothermes dans le domaine liquide, au moins pour des pressions allant jusqu'à 10 bars. Au-delà, les isothermes prennent une courbure, car plus la pression devient élevée, moins le caractère incompressible et indilatable devient justifiable.

b) On constate sur le diagramme de Mollier que lorsque la température diminue (donc la pression), les isothermes tendent vers des segments de droite verticaux. Ceci s'explique par le fait que le gaz tend vers un comportement de gaz parfait, pour lequel l'enthalpie massique ne dépend que de la température (seconde loi de Joule).

c) Le changement d'état s'opérant à une pression et une température donnée, les isothermes sont des segments de droite horizontaux dans la zone de changement d'état.

4. On a :

$$dh = d(u + P v) = du + P dv + v dP = -P dv + \delta q + P dv + v dP = T ds + v dP$$

5. Le long d'une courbe isentropique on a $ds = 0$ donc :

$$dh = v dP$$

Donc :

$$\frac{d \ln(P)}{dh} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dh} = \frac{1}{P v} > 0$$

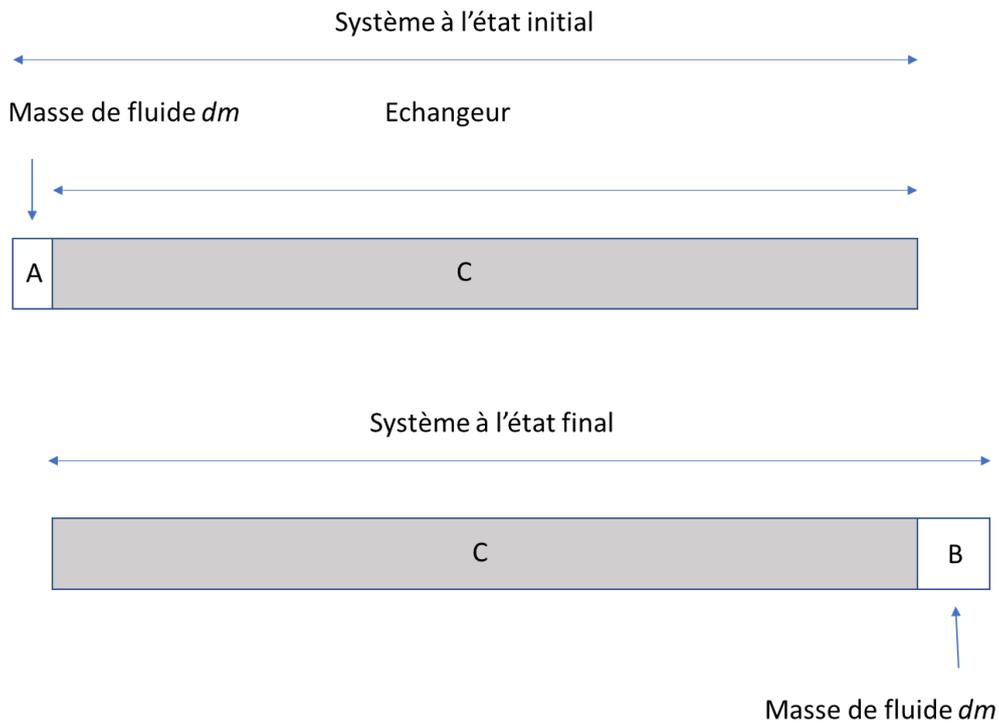
La pente des courbes isentropiques est donc positive.

6. Le long d'une courbe isenthalpique on a $dh = 0$ donc :

$$\frac{ds}{dP} = -\frac{v}{T} < 0$$

L'entropie massique est donc une fonction décroissante de la pression.

7. Commençons par les échangeurs de chaleur que sont l'évaporateur et le condenseur :



Considérons comme système, une masse infinitésimale de fluide dm qui s'apprête à entrer dans l'échangeur à l'instant initial ainsi que le fluide se trouvant dans l'échangeur à cet instant et prenons comme instant final, celui où la masse dm a fini d'entrer dans l'échangeur. En adoptant l'hypothèse de régime stationnaire, l'énergie interne de la masse dm à son entrée dans l'échangeur au point A ne dépend pas du temps, nous la noterons $dm u_A$, où u_A désigne son énergie interne massique en A. De même, quand elle ressort de l'échangeur au point B après l'avoir traversé et échangé l'énergie thermique $dm q$ elle a une énergie interne indépendante du temps $dm u_B$. Quand au fluide dans l'échangeur, il a une énergie interne également indépendante du temps que nous noterons U_C . Le premier principe permet d'écrire pour notre système :

$$\Delta U = W + Q$$

Or :

$$\Delta U = (dm u_B + U_C) - (dm u_A + U_C)$$

Et le travail des forces pressantes s'exerce en amont de façon motrice et en aval de façon résistante sous forme :

$$W = P_A V_A - P_B V_B = P_A dm v_A - P_B dm v_B$$

La chaleur échangée Q est celle échangée par le fluide de l'échangeur pendant la transformation et est également celle qu'aurait échangé la tranche de fluide dm entre son entrée dans l'échangeur et sa sortie, compte tenu de l'hypothèse de régime stationnaire. Ainsi :

$$Q = dm q$$

On en déduit :

$$(dm u_B + U_C) - (dm u_A + U_C) = P_A dm v_A - P_B dm v_B + dm q$$

Soit après simplifications :

$$(u_B + P_B v_B) - (u_A + P_A v_A) = q$$

Finalement :

$$h_B - h_A = q$$

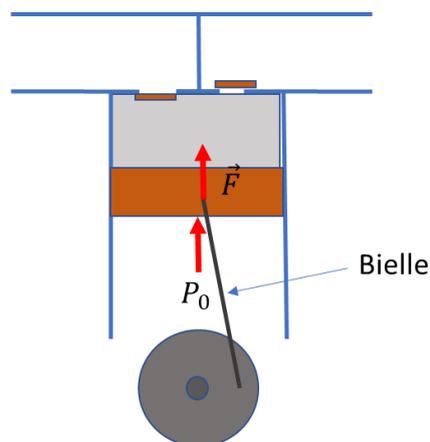
A noter que le même raisonnement se fait pour le détendeur, en faisant $q = 0$. On retrouve la démonstration de la détente isenthalpique de Joule-Thomson.

Voyons le cas du compresseur :

Le cycle du compresseur se divise en trois temps :

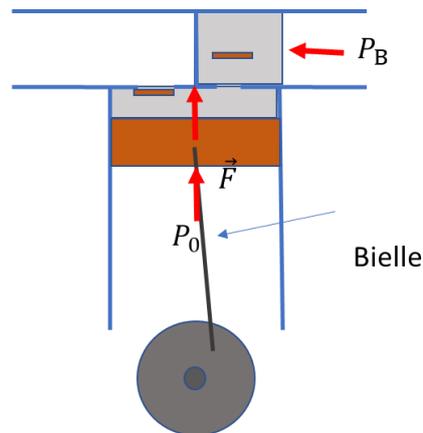
Aspiration ou admission : Le clapet d'admission s'ouvre, le clapet d'échappement étant fermé. Une masse m de gaz d'énergie interne massique u_A est admise dans un cylindre, c'est la phase d'aspiration pendant laquelle le fluide reçoit un travail de forces pressante $P_A V_A$ en amont et $P_0 V_A$ en aval dû au piston.

Compression : Les deux clapets étant fermés, le gaz est comprimé jusqu'à un volume $V_B < V_A$ et reçoit le travail $P_0 (V_A - V_B)$ lié à la pression atmosphérique agissant sur la face externe piston et se transmettant au gaz ainsi qu'un travail $W_1 > 0$ lié à la force \vec{F} exercée par la bielle sur le piston et qui est le travail qui nous intéresse en termes de coût énergétique. Le gaz échange également une chaleur $Q_1 < 0$ avec le milieu environnant car il s'échauffe pendant la compression.



Refoulement ou échappement : le clapet d'échappement s'ouvre, le clapet d'admission restant fermé. La masse comprimée de gaz m est refoulée du cylindre sans volume mort, autrement dit le gaz reçoit un travail moteur du piston $P_0 V_B + W_2$, défini comme pour la compression et un travail résistant

$-P_B V_B$ exercé par le reste de gaz avec lequel il est en contact. Là encore, le gaz échange également une chaleur $Q_2 < 0$ avec le milieu environnant.



En considérant comme système ce gaz entre l'instant où il s'apprête à être admis dans le cylindre et l'instant où il en est totalement sorti, le premier principe permet d'écrire :

$$\Delta U = W + Q$$

Avec pour l'énergie interne :

$$\Delta U = m u_B - m u_A$$

Pour le travail :

$$\begin{aligned} W &= P_A V_A - P_0 V_A + P_0 (V_A - V_B) + W_1 + P_0 V_B + W_2 - P_B V_B \\ &= P_A V_A - P_B V_B + W_1 + W_2 \\ &= P_A m v_A - P_B m v_B + m w \end{aligned}$$

Finalement :

$$W = m (P_A v_A - P_B v_B + w)$$

Et pour la chaleur :

$$Q = Q_1 + Q_2 = m q$$

Ainsi :

$$m u_B - m u_A = m (P_A v_A - P_B v_B + w) + m q$$

D'où après simplifications :

$$h_B - h_A = w + q$$

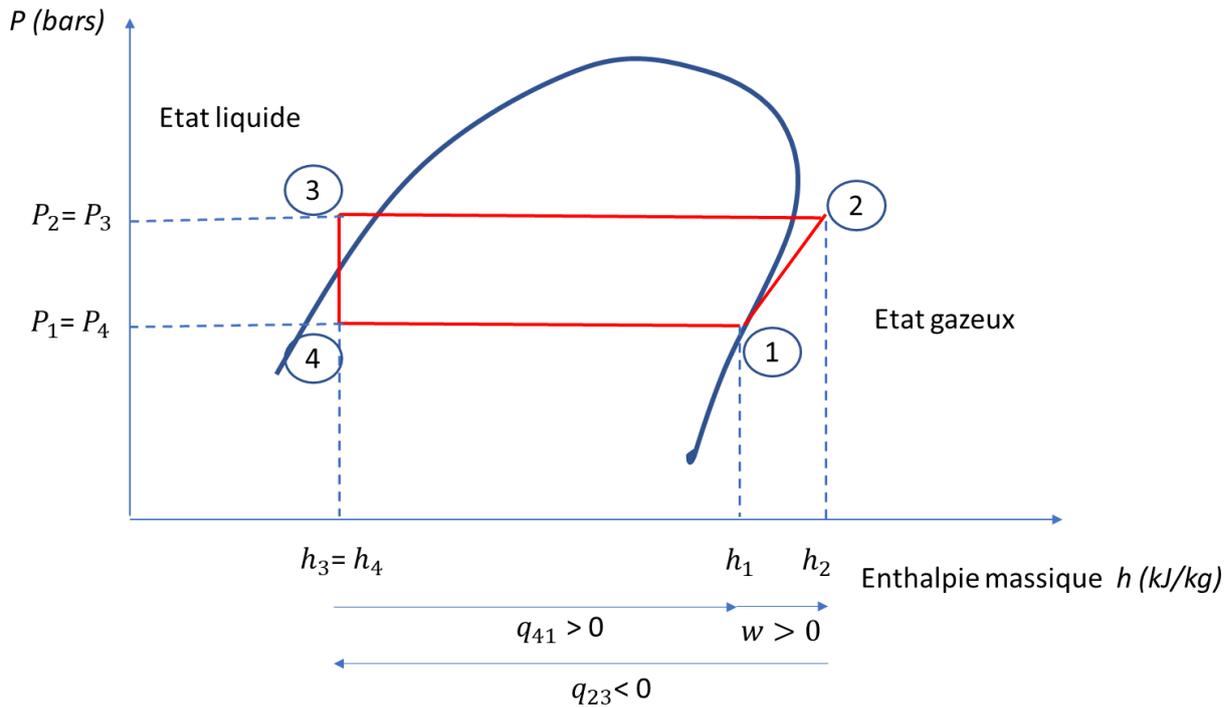
A noter que pour le compresseur, la rapidité du cycle de compression fait qu'on néglige bien souvent l'échange de chaleur devant le travail de compression, ce qui donne :

$$h_B - h_A = w$$

1.2 Cycle de la pompe à chaleur

8) Lors de la détente, il n'y a pas travail échangé autre que les forces pressantes en amont et en aval du fluide et pas de chaleur échangée (tout du moins une chaleur négligeable car la détente est rapide). Donc d'après 7. La variation d'enthalpie est nulle.

9) Cycle dans le diagramme de Mollier



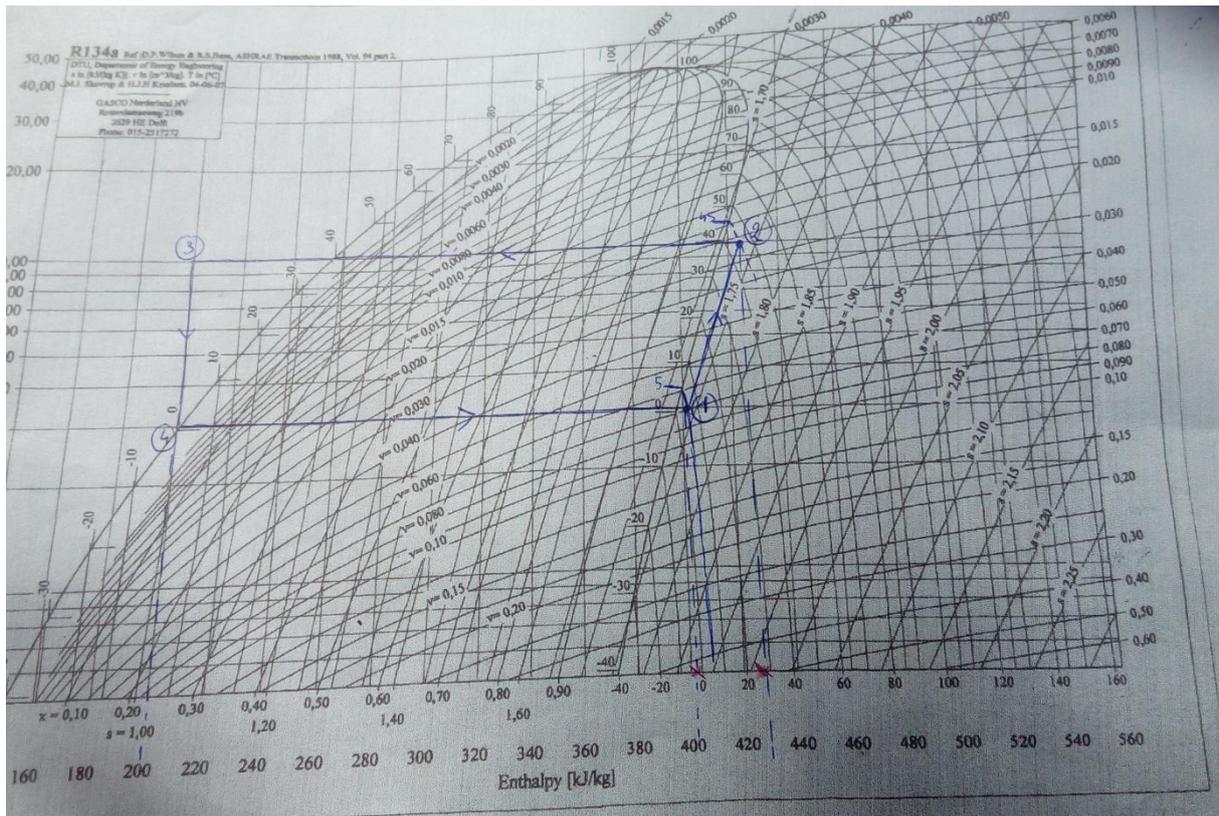
10) La variation d'énergie interne pour 1 kg de fluide effectuant un cycle étant nulle, on a :

$$q_{23} + q_{41} + w = 0$$

11) L'efficacité de la pompe à chaleur est définie comme étant le quotient de la chaleur fournie par 1 kg de fluide à la source chaude sur le travail absorbé par ce fluide sur le compresseur donc :

$$\eta = \left| \frac{q_{23}}{w} \right| = -\frac{q_{23}}{w} = -\frac{h_3 - h_2}{h_2 - h_1} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} > 1$$

12)



Les isothermes sont représentées dans la phase liquide uniquement par de petites portions perpendiculaires aux isobares, ce qui laisse à penser que ce sont des segments verticaux. Le fluide peut donc être considéré comme incompressible et indilatable à l'état liquide. En revanche, à l'état gazeux, les isothermes ne sont des segments verticaux que pour des températures très basses, en dessous de -30°C environ. Donc, dans le domaine d'usage d'une pompe à chaleur, le gaz ne peut pas être considéré comme parfait.

13) tableau des enthalpies massiques lues sur le diagramme

Point	$T (^{\circ}\text{C})$	P (bars)	h (kJ/kg)	Etat du fluide
1	5	3	400	vapeur sèche
2	45	10	430	vapeur sèche
3	0	10	200	liquide
4	0	3	200	liquide au point d'ébullition

14) Le coefficient d'efficacité s'en déduit :

$$\eta = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{430 - 200}{430 - 400} = 7,7$$

Le coefficient d'efficacité de la machine frigorifique de Carnot qui fonctionnerait avec une source froide à la température $T_F = 0^{\circ}\text{C} = 273\text{ K}$ et une source chaude à la température $T_C = 40^{\circ}\text{C} = 313\text{ K}$ est :

$$\eta^{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = \frac{313}{40} = 7,8$$

Les deux coefficients ont des valeurs voisines.

A noter que le cycle étudié, tout comme le cycle de Carnot a été considéré comme étant réversible, ce qui n'est pas le cas pour un cycle réel dont le coefficient d'efficacité sera inférieur à la valeur du cycle réversible.

15) Notons θ la durée d'un cycle, c'est à dire, le temps pour qu'une tranche de fluide infinitésimale se retrouve à la même position et donc dans le même état thermodynamique. Alors, le débit massique est, en notant m la masse de fluide dans la pompe à chaleur, défini par :

$$\delta = \frac{m}{\theta}$$

La chaleur transférée à la pièce sur un cycle est alors :

$$Q = m |q_{23}|$$

Et la puissance calorifique produite :

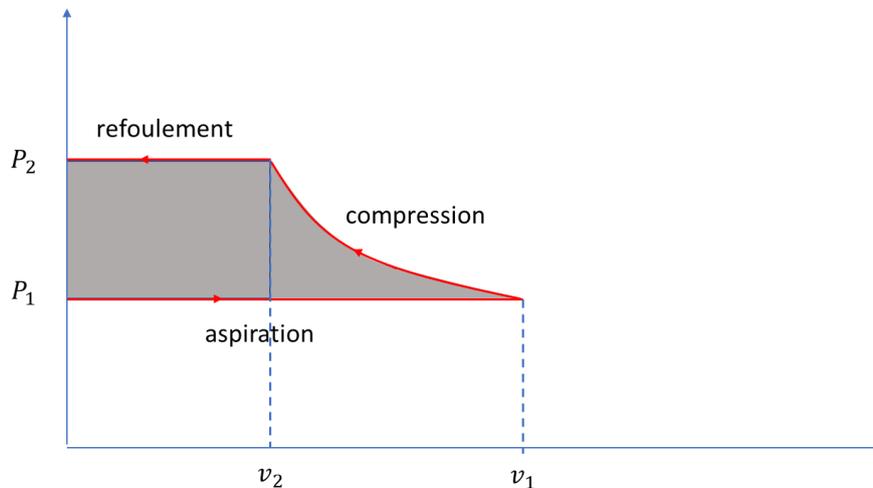
$$\mathcal{P} = \frac{Q}{\theta} = \frac{m |q_{23}|}{\theta} = \delta |q_{23}|$$

Ainsi :

$$\delta = \frac{\mathcal{P}}{|q_{23}|} = \frac{\mathcal{P}}{h_2 - h_3} = \frac{4000}{(430 - 200) \times 10^3} = 0,0174 \text{ kg s}^{-1} = 17,4 \text{ g s}^{-1}$$

1.3 Cycle du compresseur

16.



17. En notant w le travail massique absorbé par le gaz sur la bielle dans le compresseur, h_1 l'enthalpie massique du gaz juste avant son aspiration et h_2 son enthalpie massique juste après son refoulement on a :

$$\begin{aligned} w &= h_2 - h_1 = (u_2 + P_2 v_2) - (u_1 + P_1 v_1) = u_2 - u_1 + P_2 v_2 - P_1 v_1 \\ &= \left(\int_1^2 -P dv \right) + P_2 v_2 - P_1 v_1 \end{aligned}$$

Le travail massique est donc représenté par l'aire grisée du diagramme (P, v) précédent.

18. On a :

$$w = h_2 - h_1 = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} (P_2 v_2 - P_1 v_1)$$

19. La loi de Laplace pour une compression isentropique permet d'écrire :

$$T_2^\gamma P_2^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma}$$

Ainsi :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 278 \left(\frac{1}{0,3} \right)^{\frac{0,12}{1,12}} = 316 \text{ K} = 43^\circ \text{ C}$$