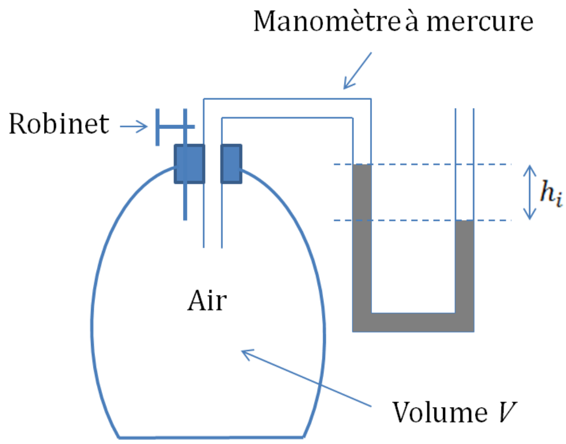
Devoir Maison de thermodynamique – AI3

Enseignant (Laurent Gry)

<u>Problème 1</u> Mesure de γ par l'expérience de Clément-Desormes (12 points) :

En 1819, Clément et Desormes conçoivent une expérience pour mesurer le coefficient $\gamma = C_p/C_v$ de l'air à température ambiante (Voir wikipédia pour plus de détails). Ils utilisent pour cela un récipient de volume constant V dans lequel l'air est mis sous légère dépression (environ 2% en dessous de la pression atmosphérique normale) grâce à une pompe à vide. Un manomètre à mercure permet de mesurer la pression à l'intérieur du récipient en mm de mercure.



<u>Partie 1</u>

Le jour de l'expérience, la pression atmosphérique ambiante est $P_a = 766{,}50\ mm$ de mercure, la température ambiante est $t_a = 12{,}5°\ C$.

Le volume du récipient est $V = 28{,}4\ L$

La dénivellation du manomètre à mercure indique $h_i = 13{,}81\ mm$ de mercure

1) Calculer la pression de l'air P_i dans le récipient en mm de mercure. La convertir en Pascals. ($101\ 325\ Pa = 760\ mm$ de mercure)
2) Calculer en pourcentage l'écart entre cette pression et la pression ambiante et comparer cette valeur aux 2 % cités précédemment.
3) Quel serait la valeur h du dénivelé de mercure si l'air du récipient était à pression ambiante ?
4) Comment ont pu s'y prendre Clément et Desormes pour abaisser la pression de l'air dans le récipient. Expliquer à l'aide du schéma et préciser s'il faut du matériel supplémentaire.

<u>Partie 2</u>

L'expérience de Clément-Desormes a consisté à ouvrir brièvement le robinet pour y laisser entrer l'air extérieur en surpression par rapport à l'air du récipient. Cela a eu pour conséquence de comprimer rapidement l'air intérieur et de ramener le dénivelé du manomètre à mercure à 0. Le robinet aussitôt refermé, un dénivelé s'est reformé peu à peu pour se stabiliser à une valeur $h_f = 3{,}61\ mm$ de mercure.

On note A l'état de l'air du récipient avant l'ouverture brève du robinet, B son état juste après la fermeture du robinet, c'est-à-dire pour un dénivelé de mercure nul et C son état final, lorsque le dénivelé est réapparu et s'est stabilisé

1) Justifier pourquoi on peut considérer la transformation $A \rightarrow B$ comme étant adiabatique d'une part et réversible d'autre part.
2) Quels sont les caractéristiques de pression, température, volume,$P_A(en\ mm\ de\ mercure)$, ,$V_A(en\ L), T_A(en\ K)$ de l'état A.
3) Quelle est la pression P_B de l'état B ?
4) Comparer la température T_B à la température T_A
5) Justifier pourquoi la température de l'état C est la température ambiante. Calculer P_C et en déduire le volume V_C.
6) Justifier pourquoi on peut considérer la transformation $B \rightarrow C$ comme isochore.
7) représenter dans le diagramme (P, V) de Clapeyron les trois états de la transformation puis les relier par des chemins réversibles dont on précisera la nature de la transformation
8) Les trois états étant proches les uns des autres, les trois chemins réversibles peuvent être assimilés à des segments.
   a) Rappeler l'équation en variables (P, V) d'un chemin de transformation adiabatique réversible
   b) Rappeler l'équation en variables (P, V) d'un chemin de transformation isotherme réversible
   c) Différencier les deux équations précédentes et remplacer les grandeurs par leur valeur d'origine (ainsi P par P_A pour le chemin réversible $\rightarrow B$) et les grandeurs différentielles par des variations (exemple : dP par $P_B - P_A$). On pourra considérer les transformations $A \rightarrow B$ et $A \rightarrow C$
   d) En déduire γ en fonction de P_A, P_B, P_C puis en fonction de h_i et h_f
   e) Faire le calcul numérique de γ et comparer à la valeur de 1,40 plus précise trouvée ultérieurement.
   f) Donner l'erreur relative commise et dire à quoi pouvait être due cette erreur

<u>Problème 2</u> Etude d'un cycle Diesel (8 points) :

Pour approcher le calcul du rendement d'un moteur diesel, on se sert d'un cycle réversible dit cycle Diesel qui se décompose en quatre transformations :

- Une compression adiabatique réversible $A \rightarrow B$ visant à représenter la compression du mélange air-gazole juste après la phase d'admission, où donc P_A est la pression atmosphérique ambiante et T_A la température ambiante.
- Une détente isobare $B \rightarrow C$ réversible visant à représenter la phase de combustion du mélange qui se déroule sur une partie de la course du piston contrairement à un moteur à essence où la combustion est considérée comme se faisant instantanément au point haut du piston à volume constant (cycle Beau de Rochas).

- Une détente adiabatique réversible $C \rightarrow D$ visant à représenter la phase après combustion où le piston continue à être repoussé par les gaz chauds.
- Une transformation isochore $D \rightarrow A$ visant à représenter la phase d'échappement et de refroidissement du mélange jusqu'à lui redonner les caractéristiques de température et de pression de l'air ambiant (les gaz d'échappement étant considérés en même nombre de mole et avec un même facteur γ qu'avant leur combustion, ce qui justifie l'emploi d'un cycle sur un gaz parfait qui n'aurait pas de modification dans sa constitution chimique)

Le mélange air-gazole est considéré à toutes les températures du cycle comme un gaz parfait pour lequel $\gamma = 1{,}4$. Le moteur est caractérisé par les deux rapports :

$$\alpha = \frac{V_A}{V_B} = 20$$

$$\beta = \frac{V_A}{V_C} = 10$$

1) Quel est le signe du travail W échangé par ce gaz au cours d'un cycle ?
2) Dans le cycle Diesel servant de modèle à la transformation réelle, la chaleur dégagée par la combustion est considérée comme étant prise à une source chaude fictive pendant la transformation isobare. C'est donc la chaleur Q_{BC} échangée pendant la transformation $B \rightarrow C$. Déterminer Q_{BC} en fonction de n, R, γ, T_B, T_C.
3) Déterminer la chaleur Q_{DA} échangée dans la transformation isochore $D \rightarrow A$ en fonction de n, R, γ, T_D, T_A.
4) En utilisant le premier principe, déduire W en fonction de Q_{BC} et Q_{DA}
5) En déduire le rendement $\eta = |W/Q_{BC}|$ de ce moteur en fonction de $\gamma, T_B, T_C, T_D, T_A$
6) En utilisant une équation caractéristique de chaque transformation, en déduire η en fonction de α, β, γ
7) Faire l'application numérique et comparer avec les valeurs réelles de rendement de moteur diesel trouvées sur internet. Comment expliquer la différence ?

Corrigé :

Problème 1

Partie 1

1) En écrivant l'équilibre de la colonne de mercure correspondant au dénivelé, on déduit la pression de l'air dans le récipient :

$$P_i = P_a - h_i = 766{,}50 - 13{,}81 \approx 752{,}69\ mm \text{ de mercure}$$

soit en Pascals :

$$P_i = 752{,}69 \times \frac{101325}{760} \approx 100\,350\ Pa$$

2) On a :

$$\frac{13,81}{766,50} \approx 1,8\ \%$$

3) Il serait nul
4) En utilisant une pompe à vide reliée au robinet

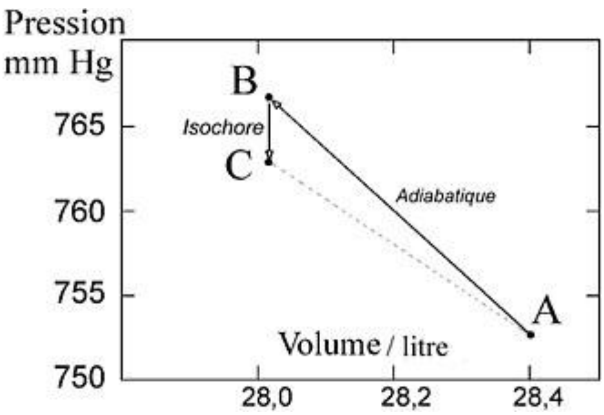
Partie 2

1) La transformation étant rapide (instantanée pour l'expérimentateur), les échanges de chaleur avec l'extérieur n'ont pas le temps de se faire de façon substantielle. Lorsque l'air extérieur pénètre dans le récipient, il comprime l'air intérieur et fait monter sa température. Il y a donc un écart de température avec celle du récipient, ce qui amorce un transfert thermique de l'air du récipient vers le récipient puis du récipient vers l'extérieur. Mais le laps de temps entre ouverture et fermeture du robinet est si court que ce transfert ne peut être important.
Le caractère réversible tient au fait, que l'air commence à s'introduire à travers le robinet, certes rapidement à notre échelle de temps, mais progressivement à une échelle plus réduite en s'adaptant d'abord à la pression du gaz se situant à l'intérieur, puis en la faisant croître jusqu'à la valeur de la pression ambiante et d'autre part, la différence de pression est très faible entre air intérieur et air extérieur.

2) On a : $P_A = 752,69\ \ mm\,Hg, T_A = 273,15 + 12,5 \approx 285,7\ K, V_A = 28,4\ L$
3) $P_B = 766,50\ mm\,Hg$
4) $T_B > T_A$
5) Le dénivelé de mercure étant stabilisé, la pression du gaz à l'intérieur du récipient ne varie plus, ainsi que son volume, donc sa température fait de même. Le gaz est donc à l'équilibre avec le milieu extérieur qui est le récipient, lui-même à l'équilibre avec l'air ambiant. Donc le gaz est à température ambiante et $T_C = T_A$. Nous avons en outre
$$P_C = P_B - h_f = 766,50 - 3,61 = 762,89\ mm\,Hg$$
Et :
$$P_C\,V_C = P_A\,V_A$$
Donc :
$$V_C = \frac{P_A\,V_A}{P_C} = \frac{752,69 \times 28,4}{762,89} \approx 28,0\ L$$

6) La section du manomètre à mercure est suffisamment faible pour considérer les variations de volume d'air dans le manomètre comme négligeables devant le volume V du récipient.

7) diagramme de Clapeyron



8)

a) Pour une transformation adiabatique réversible $A \rightarrow B$, nous avons :

$$P\,V^{\gamma} = cte$$

b) Pour une transformation isotherme réversible $B \rightarrow C$, nous avons :

$$P\,V = cte$$

c) En différentiant le logarithme des deux relations précédentes, on a :

$$\frac{dP}{P} + \gamma\,\frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0$$

d) En remplaçant, on obtient pour les deux transformations

$$\frac{P_B - P_A}{P_A} + \gamma\,\frac{V_B - V_A}{V_A} = 0$$

$$\frac{P_C - P_A}{P_A} + \frac{V_C - V_A}{V_A} = 0$$

On en déduit sachant $V_C = V_B$:

$$\frac{P_B - P_A}{P_A} - \gamma\,\frac{P_C - P_A}{P_A} = 0$$

Soit :

$$\boxed{\gamma = \frac{P_B - P_A}{P_C - P_A} = \frac{h_i}{h_i - h_f}}$$

e) On a :

$$\gamma = \frac{13,81}{13,81 - 3,61} \approx 1,35$$

Cette valeur est proche de 1,40

f) L'erreur relative est de :

$$\frac{1{,}40 - 1{,}35}{1{,}40} = 3{,}5\ \%$$

Les raisons possibles de l'écart est la considération d'une transformation $A \to B$ adiabatique. Le gaz s'échauffant pendant la compression, l'équilibre thermique avec le récipient est rompu. Il y a donc un peu de chaleur qui est transmise par le gaz au récipient, laquelle la transfère à l'air ambiant, au cours de cette transformation

Problème 2

1) Le cycle étant exécuté dans le sens des aiguilles d'une montre, le travail échangé W est négatif
2) La transformation étant isobare, l'échange de travail ne se faisant que via les forces pressantes, nous avons :

$$\boxed{Q_{BC} = \Delta H = \gamma \frac{n\,R}{\gamma - 1}\ (T_C - T_B)}$$

3) La transformation étant isochore, l'échange de travail est nul et nous avons :

$$\boxed{Q_{DA} = \Delta U = \frac{n\,R}{\gamma - 1}\ (T_A - T_D)}$$

4) Le premier principe permet d'écrire :

$$W + Q_{BC} + Q_{DA} = 0$$

Donc :

$$\boxed{W = -\,(Q_{BC} + Q_{DA})}$$

5) Le rendement est :

$$\boxed{\eta = \frac{-W}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{T_A - T_D}{\gamma\,(T_C - T_B)}}$$

6) La compression adiabatique réversible $A \to B$ et la détente adiabatique réversible $C \to D$ permettent d'écrire :

$$T_A\,{V_A}^{\gamma-1} = T_B\,{V_B}^{\gamma-1}$$
$$T_D\,{V_D}^{\gamma-1} = T_C\,{V_C}^{\gamma-1}$$

Sachant :

$$V_D = V_A$$

On déduit :

$$T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A\,\alpha^{\gamma-1}$$
$$T_C = T_D\left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = T_D\,\beta^{\gamma-1}$$

La transformation isobare $B \to C$ donne alors :

$$P_B = P_C$$

Soit :

$$\frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C}$$

Donc :

$$T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_B \frac{V_C}{V_A}\frac{V_A}{V_B} = T_B \frac{\alpha}{\beta} = T_A\, \alpha^{\gamma-1} \frac{\alpha}{\beta} = T_A \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta}$$
$$T_D = T_C\, \beta^{1-\gamma} = T_A \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta} \beta^{1-\gamma} = T_A \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}}$$

Et :

$$\eta = 1 + \frac{1 - \frac{\alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma}}}{\gamma\left(\frac{\alpha^{\gamma}}{\beta} - \alpha^{\gamma-1}\right)} = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\beta^{\gamma} - \alpha^{\gamma}}{\beta^{\gamma-1}\alpha^{\gamma} - \beta^{\gamma}\,\alpha^{\gamma-1}}\right)$$

Soit en multipliant par $\beta^{-\gamma}\alpha^{-\gamma}$ numérateur et dénominateur de la fraction

$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha^{-\gamma} - \beta^{-\gamma}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}\right)$$

Finalement :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\beta^{-\gamma} - \alpha^{-\gamma}}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}\right)}$$

7) Application numérique :

$$\eta = 1 - \frac{1}{1{,}4}\left(\frac{10^{-1{,}4} - 20^{-1{,}4}}{10^{-1} - 20^{-1}}\right) \approx 65\ \%$$