Devoir maison AI3 - janvier 2015

(Enseignant : Laurent Gry)

I Exercice 1 : Recherche de l'équation d'état d'un fluide (10 points)

On rappelle que pour un fluide décrit par des variables d'état (P, V, T), on définit le coefficient de dilatation isobare par :

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

et le coefficient de compressiblité isotherme par :

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

Des mesures expérimentales ont permis d'établir que ces coefficients vérifiaient, pour une mole de fluide, des relations de la forme :

$$\alpha = \frac{R}{R\,T + b\,P}$$

$$K_T = \frac{R\,T}{P\,(R\,T + b\,P)}$$

En déduire par intégration, le volume molaire V en fonction de P, de T et d'une constante d'intégration.

Déterminer cette constante, sachant qu'aux faibles de valeurs de pression, la relation obtenue doit être celle des gaz parfaits.

Quel est le nom du genre de loi obtenue ?

II Exercice 2 : Modélisation de l'atmosphère terrestre (10 points)

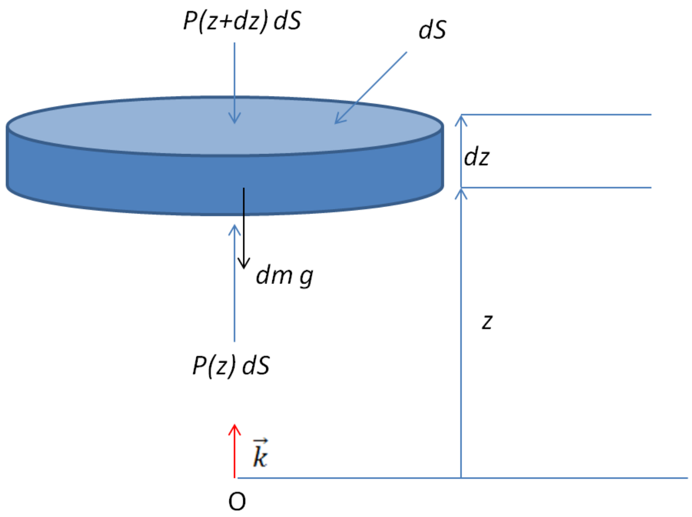
1) Masse molaire de l'air

Estimer la masse molaire de l'air en considérant qu'il est constitué de $80\ \%$ de diazote et de $20\ \%$ de dioxygène.

Rappel : $M(N) = 14\ g\ mol^{-1}$, $M(0) = 16\ g\ mol^{-1}$

2) Equation différentielle locale

En faisant un bilan de forces sur un cylindre infinitésimal de surface dS et d'épaisseur dz (voir figure ci-dessous), établir l'équation différentielle vérifiée par la pression en fonction de l'altitude z et de la masse volumique de l'air ρ.



En considérant l'air comme un gaz parfait, exprimer, à partir de l'équation d'état du gaz, appliquée au cylindre précédent, la masse volumique ρ de l'air en fonction de la pression P, de la température absolue T, de la masse molaire de l'air M et de la constante des gaz parfaits R. En déduire que l'équation différentielle de la pression est :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M\,P}{R\,T}\,g$$

Préciser les unités de chaque grandeur.

Donnée : $g = 9{,}81\,m\,s^{-2}$

3) Modélisation de la troposphère

La troposphère est la partie de l'atmosphère située entre la surface de la Terre (altitude 0) et la surface d'altitude $11\,000\,m$. On sait, par des mesures effectuées avec des ballon-sonde ou bien ne serait-ce qu'en prenant un avion de ligne, que la température décroît en s'élevant dans la troposphère.

A supposer que la température au sol soit de $15°\mathrm{C}$ et que la tablette d'un avion affiche une température extérieure de $-50°\mathrm{C}$ à une altitude de $10\,000\,m$, modéliser la courbe de température dans la troposphère en supposant qu'elle est une fonction affine de l'altitude, donc de la forme :

$$T = a - b\,z \qquad (T \text{ en } Kelvin, z \text{ en } mètre)$$

On précisera donc les valeurs de a et b ainsi que leurs unités.

Résoudre alors l'équation différentielle de la pression, en notant P_0 la pression à l'altitude 0

En déduire (en atm) la valeur de la pression notée P_S à l'altitude de $11\,000\,m$ (frontière entre la troposphère et la stratosphère) et de la pression $P(5000)$ à l'altitude de $5\,000\,m$

Données :

$$P_0 = 1\,atm, \qquad R = 8{,}31\,J\,K^{-1}mol^{-1}, \qquad T(K) = t(°\mathrm{C}) + 273$$

4) <u>Modélisation du début de la stratosphère</u>

Nous supposerons que la stratosphère, dans sa partie initiale allant de $11\,000\,m$ à $25\,000\,m$, peut être, de façon simplifiée, modélisée par une couche isotherme.

Résoudre l'équation différentielle de la pression dans ces conditions. On notera T_S la température à l'altitude de $11\,000\,m$ et on exprimera la pression (en atm) en fonction des valeurs initiales P_S, T_S et des autres paramètres M, g, R, z et on précisera la valeur de T_S.

Correction :

Exercice I

On a :

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{R}{R\,T + b\,P}$$

donc, par intégration, à P fixé :

$$Ln(V) = Ln(R\,T + b\,P) + g(P)$$

soit en dérivant par rapport à P à T fixé :

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{b}{R\,T + b\,P} + g'(P)$$

donc :

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

On déduit :

$$-\frac{b}{R\,T + b\,P} - g'(P) = \frac{R\,T}{P\,(R\,T + b\,P)}$$

$$g'(P) = -\frac{b\,P}{P\,(R\,T + b\,P)} - \frac{R\,T}{P\,(R\,T + b\,P)} = -\frac{1}{P}$$

donc par intégration :

$$g(P) = -Ln(P) + C$$

d'où :

$$Ln(V) = Ln(R\,T + b\,P) - Ln(P) + C$$

$$V = e^C\,\frac{R\,T + b\,P}{P}$$

finalement :

$$P\,V = A\,(R\,T + b\,P)$$

A étant une constante strictement positive arbitraire.

Or, pour P proche de 0, le fluide doit tendre vers le comportement d'un gaz parfait et donc obéir à la loi :

$$P\,V = R\,T$$

On en déduit :

$$A = 1$$

D'où la loi générale du fluide :

$$P\,V = R\,T + b\,P$$

soit encore :

$$\boxed{P\,(V - b) = R\,T}$$

On reconnaît la loi suivie par un gaz de Van der Waals

Exercice II

1) Masse molaire de l'air

$$M \approx 0{,}8 \times 28 + 0{,}2 \times 32 \approx 29\ g\ mol^{-1}$$

2) Equation différentielle de la pression

La loi de Newton, appliquée au cylindre de surface de base dS et de hauteur dz s'écrit, en projection sur un axe vertical (O, z) de vecteur unitaire $\vec{k}$ dirigé vers le haut.

$$P(z)\,dS - P(z + dz)\,dS - \rho\,dV\,g = 0$$

avec :

$$dV = dS\,dz$$

On en tire :

$$\frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} = -\rho\,g$$

soit :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\rho\, g}$$

Loi des gaz parfaits

L'air étant considéré comme un gaz parfait, pour le cylindre précédent de masse dm, de volume dV et contenant dn moles, nous avons :

$$P\, dV = dn\, R\, T$$

avec :

$$dn = \frac{dm}{M} = \frac{\rho\, dV}{M}$$

Ainsi :

$$P\, dV = \frac{\rho\, dV}{M}\, R\, T$$

soit :

$$\boxed{\rho = \frac{M\, P}{R\, T}}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\boxed{\frac{dP}{dz} = -\frac{M\, P}{R\, T}\, g}$$

Unités :

P en atm, R en $J\, K^{-1} mol^{-1}$, T en K , M en $kg\, mol^{-1}$, g en $m\, s^{-2}$

Remarques :

L'unité choisie pour la pression (atm) n'est pas l'unité internationale qui est le Pascal. On rappelle : $1\ atm = 101\ 325\ Pa$

La valeur de la masse molaire de l'air compatible avec la formule est :

$$M = 29 \times 10^{-3}\ kg\, mol^{-1}$$

3) Modélisation de la troposphère

$$T = a - b\,z$$

Or nous avons, pour $z = 0\ m$, $T = 288\ K$ donc :

$$\boxed{a = 288\ (K)}$$

D'autre part, pour ce qui est des variations :

$$\Delta T = -b\,\Delta z$$

Donc :

$$\boxed{b = -\frac{\Delta T}{\Delta z} = -\frac{223 - 288}{10\ 000} = \frac{65}{10\ 000} = 6{,}5\ \times 10^{-3}\ K\ m^{-1}}$$

<u>Résolution de l'équation différentielle</u> :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M\ P}{R\ (a - b\ z)}\ g$$

Par séparation de variables, on obtient :

$$\frac{dP}{P} = \frac{M\ g}{R\ b} \times \frac{-\ b\ dz}{a - b\ z}$$

et par intégration :

$$Ln(P) = \frac{M\ g}{R\ b}\ Ln(a - b\ z) + c$$

La constante d'intégration c s'obtient par condition initiale, en faisant $z = 0$ dans l'équation :

$$Ln(P_0) = \frac{M\ g}{R\ b}\ Ln(a) + c$$

Par différence avec l'équation précédente, on en déduit :

$$Ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M\ g}{R\ b}\ Ln\left(\frac{a - b\ z}{a}\right)$$

d'où :

$$P = P_0 \left(\frac{a - b\, z}{a}\right)^{\frac{M\, g}{R\, b}}$$

Application numérique :

$$P_S = P(11\,000) = 1\, \left(\frac{288 - 6{,}5 \times 10^{-3} \times 11\,000}{288}\right)^{\frac{29\times 10^{-3} \times\, 9{,}91}{8{,}31\times\, 6{,}5\times 10^{-3}}} \approx 0{,}22\ atm$$

$$P(5\,000) = 1\, \left(\frac{288 - 6{,}5 \times 10^{-3} \times 5\,000}{288}\right)^{\frac{29\times 10^{-3} \times\, 9{,}91}{8{,}31\times\, 6{,}5\times 10^{-3}}} \approx 0{,}53\ atm$$

Nous voyons au passage, avec ce modèle, que la pression en haut du Mont-Blanc ($4\,809\ m$) est donc environ la moitié de celle au niveau de la mer.

1) Modélisation de la stratosphère

On prend pour modèle :

$$T = T_S = 288 - 6{,}5 \times 10^{-3} \times 11\,000 = 216{,}5\ K$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{M\, P}{R\, T_S}\, g$$

Soit, par séparation de variables :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{M\, g}{R\, T_S}\, dz$$

et par intégration :

$$Ln(P) = \frac{M\, g}{R\, T_S}\, z + c$$

La constante d'intégration c s'obtient par condition initiale, en faisant $z = 11\,000$ dans l'équation :

$$Ln(P_S) = \frac{M\,g}{R\,T_S} \times 11\,000 + c$$

Par différence avec l'équation précédente, on en déduit :

$$Ln\left(\frac{P}{P_S}\right) = \frac{M\,g}{R\,T_S}\,(z - 11\,000)$$

D'où :

$$\boxed{P = P_S\, e^{\frac{M\,g}{R\,T_S}(z-11\,000)}}$$