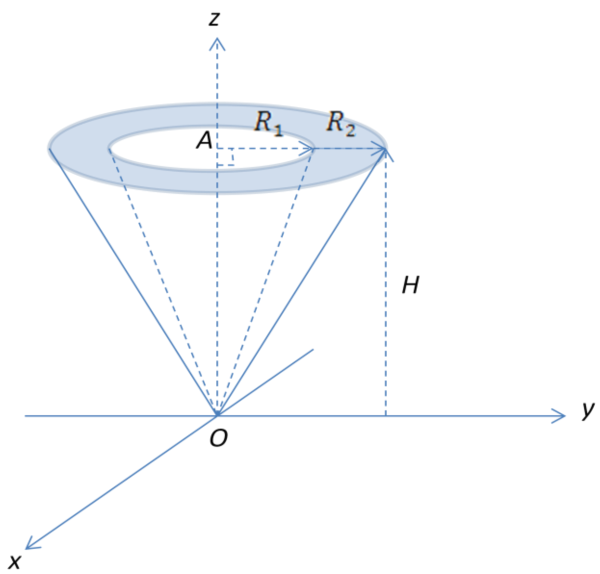
Devoir maison de dynamique du solide

Exercice 1 : Cône évidé (10 points)

On considère un cône homogène évidé de masse volumique $\rho = 8000\ kg/m^3$, de rayon intérieur $R_1 = 4\ cm$ et extérieur $R_2 = 5\ cm$ et de hauteur $H = 10\ cm$ tel que défini par la figure ci-dessous :



Pour chaque question, on fera apparaître la formule littérale puis on fera l'application numérique.

1) Calculer, par méthode intégrale, les coordonnées du centre d'inertie G du cône évidé dans le repère (O ; x ; y ; z). On détaillera le calcul ainsi que la méthode intégrale employée, forme, ordre des éléments différentiel de volume employés (la clarté de l'exposé ainsi que la qualité des dessins (à main levée) sera récompensée) (3 points)

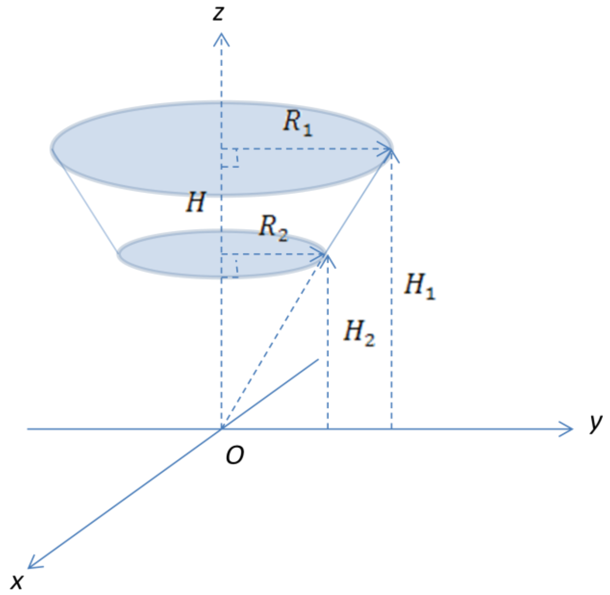
2) Retrouver le résultat précédent en utilisant l'associativité du barycentre de masses et les coordonnées vues en cours d'un cône plein ($R_2 = R$; $R_1 = 0$) (3 points)

3) Calculer, par méthode intégrale, et avec le même souci du détail, le moment d'inertie du cône évidé par rapport à l'axe (O ; x) puis l'axe (O ; z) (3 points)

4) Sans utiliser de méthode intégrale, déduire de la question précédente le moment d'inertie du cône par rapport à l'axe (A ; x) , le point A étant le centre de la base du cône.

Exercice 2 : Tronc de cône (6 points)

On considère un tronc de cône $\mathcal{C}$ de sommet 0, de rayons R_1 et R_2 et de hauteur H, tel que défini sur la figure ci-dessous :



On note $\mathcal{C}_1$ (respectivement $\mathcal{C}_2$) le cône de sommet O dont la base est celle de rayon R_1 (respectivement R_2) du cône tronqué et la hauteur H_1 (respectivement H_2).

1) Exprimer H_1 et H_2 en fonction de R_1, R_2 et H (1,5 point)
2) Déterminer dans le repère (O ; x ; y ; z) les coordonnées du centre de gravité de chaque cône $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. (1 point)
3) En déduire les cordonnées du centre de gravité G du cône tronqué en fonction de R_1, R_2 et H (2,5 points)

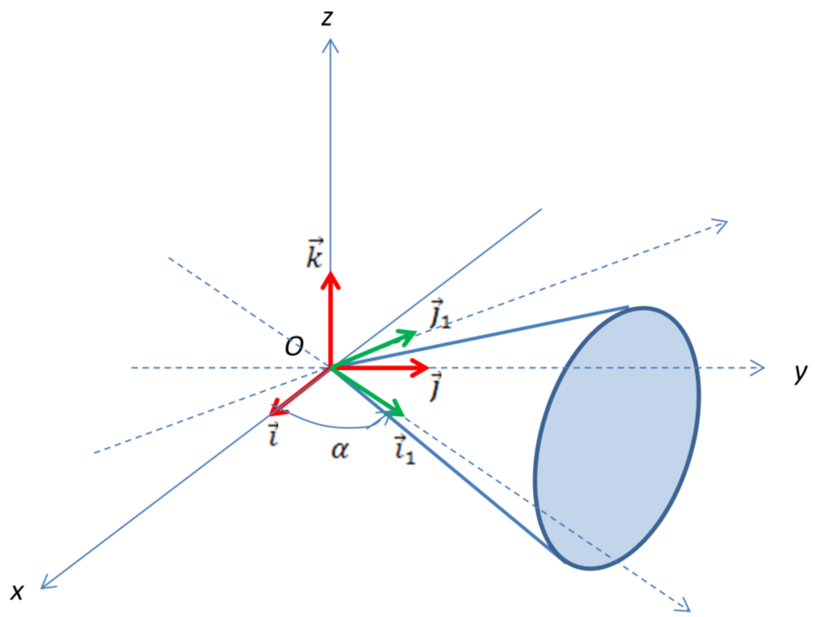
On rappelle l'expression de la matrice d'inertie d'un cône masse m, de rayon R et de hauteur H dans le repère principal d'inertie d'origine son sommet O :

$$[J]_{Oxyz} = \frac{3}{20} m \begin{pmatrix} R^2 + 4\,H^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4\,H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,R^2 \end{pmatrix}$$

4) En déduire la matrice d'inertie du cône tronqué dans le repère (O ; x ; y ; z) (2 points)
5) En appliquant le théorème d'Huygens, en déduire les trois moments d'inertie J_{Gxx}, J_{Gyy} et J_{Gzz} puis la matrice d'inertie dans le repère (G ; x ; y ; z) (3 points)

Exercice 3 : Cône qui roule n'amasse pas … (4 points)

On considère un cône de rayon R et de hauteur H roulant dans un plan horizontal, sur une de ses arêtes autour de son sommet O.



Pour repérer la position du cône, on définit deux repères. Le premier est obtenu par une rotation d'angle α autour de l'axe orienté par $\vec{k}$ du repère d'étude $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$, α étant une mesure de l'angle orienté formé par la demi droite (O ; x) et l'arête du cône en contact avec le plan. Il conduit au repère $(O\ ;\ \vec{\imath}_1\ ;\ \vec{\jmath}_1\ ;\ \vec{k}_1)$. Le second repère est obtenu en considérant d'abord un repère intermédiaire $(O\ ;\ \vec{\imath}_2\ ;\ \vec{\jmath}_2\ ;\ \vec{k}_2)$ obtenu par rotation de $(O\ ;\ \vec{\imath}_1\ ;\ \vec{\jmath}_1\ ;\ \vec{k}_1)$ d'angle θ autour de $(O\ ;\ -\vec{\jmath}_1)$ où θ est l'angle du cône.

Enfin on parviendra à un repère $(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J}\ ;\ \vec{K})$ lié au cône par une rotation d'angle β autour de l'axe $(O\ ;\ -\vec{\imath}_2)$ par rapport à ce repère.

1) Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{1/0}$ de l'espace solide de repère $(O\ ;\ \vec{\imath}_1\ ;\ \vec{\jmath}_1\ ;\ \vec{k}_1)$ par rapport au repère $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ (0,5 point)
2) Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{2/1}$ de l'espace solide de repère $(O\ ;\ \vec{\imath}_2\ ;\ \vec{\jmath}_2\ ;\ \vec{k}_2)$ par rapport au repère $(O\ ;\ \vec{\imath}_1\ ;\ \vec{\jmath}_1\ ;\ \vec{k}_1)$ (0,5 point)
3) Déterminer le vecteur rotation $\vec{\Omega}_{C/2}$ de l'espace solide du cône de repère $(O\ ;\ \vec{I}\ ;\ \vec{J}\ ;\ \vec{K})$ par rapport au repère $(O\ ;\ \vec{\imath}_2\ ;\ \vec{\jmath}_2\ ;\ \vec{k}_2)$ (1 point)
4) En déduire le vecteur rotation $\vec{\Omega}_C$ de l'espace solide défini par le cône par rapport au repère d'étude $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$. On exprimera ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$ et pour cela il faudra commencer par exprimer les coordonnées des vecteurs de chaque base dans la précédente (des figures planes seront les bienvenues)

CORRECTION

Exercice 1 :

Nous noterons pour tout l'exercice :

- Pour le cône plein $\mathcal{C}_1$ de rayon R_2 : G_2 = centre de gravité ; V_2 = volume ; $m_2 = \rho\, V_2$= masse ; z_{G_2} = coordonnée de G_2 sur l'axe $(O\,;z)$
- Pour le cône plein $\mathcal{C}_2$ de rayon R_1 ôté au précédent : G_1 = centre de gravité ; V_1 = volume ; $m_1 = \rho\, V_1$= masse ; z_{G_1} = coordonnée de G_1 sur l'axe $(O\,;z)$
- Pour le cône évidé $\mathcal{C}$: G = centre de gravité ; V = volume ; $m = \rho\, V$= masse ; z_G = coordonnée de G sur l'axe $(O\,;z)$

1)

Par symétrie, le centre de gravité G est porté par l'axe $(O\,;z)$. Sa coordonnée sur cet axe vérifie :

$$\boxed{m\, z_G = \iint_{\mathcal{C}} z\, dm}$$

Calculons d'abord l'intégrale double :

- Elément différentiel de masse et volume :

$$d^1V = \pi\,({r_2}^2 - {r_1}^2)\, dz$$

avec :

$$\frac{r_2}{R_2} = \frac{z}{H} \quad ; \quad \frac{r_1}{R_1} = \frac{z}{H}$$

soit :

$$r_2 = \frac{R_2\, z}{H} \quad ; \quad r_1 = \frac{R_1\, z}{H}$$

On en déduit :

$$\boxed{d^1m = \rho\, d^1V = \rho\frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{H^2}\, z^2 dz}$$

- Contribution élémentaire à l'intégrale :

$$\boxed{z\, d^1m = \rho\frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{H^2}\, z^3 dz}$$

- Intégrale :

$$\iint_{\mathcal{C}} z\, dm = \int_{z=0}^{z=H} z\, d^1m = \rho\frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{H^2}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H = \rho\frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)H^2}{4}$$

or

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_2 - V_1} = \frac{m}{\frac{\pi\, {R_2}^2\, H}{3} - \frac{\pi\, {R_1}^2\, H}{3}} = \frac{3\, m}{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) H}$$

On en déduit :

$$m\, z_G = \frac{3\, m}{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) H} \times \frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) H^2}{4}$$

Soit finalement :

$$\boxed{z_G = \frac{3}{4}\, H}$$

En prenant $R_1 = 0$, nous obtenons la position du centre de gravité pour un cône plein.

2) Par associativité du centre de gravité, nous avons :

$$m_1\, z_{G_1} + m\, z_G = m_2\, z_{G_2}$$
$$\rho\, V_1\, z_{G_1} + \rho\, V\, z_G = \rho\, V_2\, z_{G_2}$$

$$\boxed{z_G = \frac{V_2\, z_{G_2} - V_1\, z_{G_1}}{V_2 - V_1}}$$

$$z_G = \frac{\frac{\pi\, {R_2}^2\, H}{3} \times \frac{3}{4}\, H - \frac{\pi\, {R_1}^2\, H}{3} \times \frac{3}{4}\, H}{\frac{\pi\, {R_2}^2\, H}{3} - \frac{\pi\, {R_1}^2\, H}{3}}$$

Nous retrouvons bien :

$$\boxed{z_G = \frac{3}{4}\, H}$$

3) Ecrivons les relations liant les moments d'inertie par rapport aux axes du repère aux moments par rapport aux plans :

$$\begin{cases} J_{Ox} = J_{xOy} + J_{xOz} \\ J_{Oy} = J_{yOx} + J_{yOz} \\ J_{Oz} = J_{zOx} + J_{zOy} \end{cases}$$

Or par symétrie, nous avons :

$$J_{Ox} = J_{Oy}\ ;\quad J_{zOx} = J_{zOy}$$

Le système devient :

$$\begin{cases} J_{Ox} = J_{Oy} \\ J_{Oy} = J_{yOx} + J_{yOz} \\ J_{Oz} = 2\, J_{zOy} \end{cases}$$

Or les moments J_{yOx} et J_{Oz} sont ceux qui se prêtent le mieux à une intégration. Il suffit donc de les évaluer et en déduire les autres.

Calcul de $J_{yOx} = \iint_{\mathcal{C}} z^2\, dm$

- <u>Elément de volume et de masse</u> :
-

$$\boxed{d^1m = \rho\, d^1V = \rho \frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{H^2}\ z^2 dz}$$

- <u>Contribution élémentaire à l'intégrale</u> :

$$\boxed{z^2\ d^1m = \rho \frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{H^2}\ z^4 dz}$$

- <u>Intégrale</u> :

$$J_{xOy} = \int_{z=0}^{z=H} z^2\ d^1m = \rho \frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{H^2} \left[\frac{z^5}{5}\right]_0^H = \rho \frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{5}\ H^3$$

$$J_{xOy} = \frac{3\, m}{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) H} \times \frac{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}{5}\ H^3$$

$$\boxed{J_{xOy} = \frac{3}{5} m\, H^2}$$

Calcul de $J_{Oz} = \iint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2) dm$ en commençant par un cône plein de rayon R et de hauteur H

- <u>Elément de volume et de masse</u> :

$$d^1m = \rho\, d^1V = \rho \times 2\,\pi\, r\, dr\, h(r)$$

Avec :

$$\frac{H - h(r)}{H} = \frac{r}{R}$$

$$h(r) = H\, \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

- Contribution élémentaire à l'intégrale :

$$\boxed{r^2\, d^1m = \rho \;\; \times 2\,\pi\, H \left(r^3 - \frac{r^4}{R}\right) dr}$$

- Intégrale :

$$J_{Oz} = \int_{r=0}^{r=R} r^2\, d^1m = \rho \;\; \times 2\,\pi\, H\, \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5\,R}\right]_0^R = \rho \times 2\,\pi\, H\, \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5}\right)$$

$$J_{Oz} = \frac{3\, m}{\pi\, R^2\, H} \times \frac{2\,\pi\, H\;\, R^4}{20}$$

$$\boxed{J_{Oz}(c\hat{o}ne\ plein) = \frac{3}{10} m\, R^2}$$

On en déduit par différence le moment d'inertie du cône évidé :

$$J_{Oz} = \frac{3}{10} m_2\, {R_2}^2 - \frac{3}{10} m_1\, {R_1}^2 = \frac{3}{10}\, \rho\, \left(V_2\, {R_2}^2 - V_1\, {R_1}^2\right)$$

$$J_{Oz} = \frac{3}{10} \times \frac{3\, m}{\pi\, \left({R_2}^2 - {R_1}^2\right) H} \times \left(\frac{\pi\, {R_2}^2\, H}{3}\; {R_2}^2 - \frac{\pi\, {R_1}^2\, H}{3} {R_1}^2\right)$$

$$\boxed{J_{Oz} = \frac{3}{10} m \frac{{R_2}^4 - {R_1}^4}{\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)} = \frac{3}{10} m\, \left({R_2}^2 + {R_1}^2\right)}$$

On en déduit :

$$J_{zOy} = \frac{J_{Oz}}{2} = \frac{3}{20} m \left({R_2}^2 + {R_1}^2\right)$$

Puis :

$$\boxed{J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{3}{20} m \left({R_2}^2 + {R_1}^2\right) + \frac{3}{5} m H^2}$$

D'où la matrice d'inertie du cône évidé dans le repère $(O\ x\ ;y\ ;z)$:

$$\boxed{[J]_{(O\ x\ ;y\ ;z)} = \frac{3}{20} m \begin{pmatrix} \left({R_2}^2 + {R_1}^2 + 4\,H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left({R_2}^2 + {R_1}^2 + 4\,H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right) \end{pmatrix}}$$

4) Par théorème d'Huygens, nous avons :

$$J_{Ax} = J_{Gx} + m\,AG^2$$
$$J_{Ox} = J_{Gx} + m\,OG^2$$

Soit par différence :

$$J_{Ax} = J_{Ox} + m\,(AG^2 - OG^2)$$

$$J_{Ax} = \frac{3}{20} m\left({R_2}^2 + {R_1}^2 + 4\,H^2\right) + m\left(\frac{H^2}{16} - \frac{9\,H^2}{16}\right)$$

$$J_{Ax} = \frac{3}{20} m\left({R_2}^2 + {R_1}^2 + 4\,H^2\right) - \frac{10}{20} m\,H^2$$

$$J_{Ax} = \frac{3}{20} m\left({R_2}^2 + {R_1}^2 + \frac{2}{3}\,H^2\right)$$

La matrice d'inertie en A s'en déduit :

$$\boxed{[J]_{(A\ x\ ;y\ ;z)} = \frac{3}{20} m \begin{pmatrix} \left({R_2}^2 + {R_1}^2 + \frac{2}{3}\,H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left({R_2}^2 + {R_1}^2 + \frac{2}{3}\,H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2\left({R_2}^2 + {R_1}^2\right) \end{pmatrix}}$$

Exercice 2 :

1) Par théorème de Thalès, nous avons :

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{H_1 - H}{H_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$1 - \frac{H}{H_1} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{\begin{gathered} H_1 = \frac{R_1\, H}{R_1 - R_2} \\ H_2 = \frac{R_2\, H}{R_1 - R_2} \end{gathered}}$$

2) Notons :
z_{G_1} = coordonnée du centre de gravité G_1 de $\mathcal{C}_1$ sur l'axe $(O\,;z)$
z_{G_2} = coordonnée du centre de gravité G_2 de $\mathcal{C}_2$ sur l'axe $(O\,;z)$

Nous avons :

$$\boxed{\begin{gathered} z_{G_1} = \frac{3}{4} H_1 \\ z_{G_2} = \frac{3}{4} H_2 \end{gathered}}$$

3) Par associativité du centre de gravité :

$$z_G = \frac{V_2\, z_{G_2} - V_1\, z_{G_1}}{V_2 - V_1}$$

$$z_G = \frac{\frac{\pi\, {R_1}^2\, H_1}{3} \times \frac{3}{4} H_1 - \frac{\pi\, {R_2}^2\, H_2}{3} \times \frac{3}{4} H_2}{\frac{\pi\, {R_1}^2\, H_1}{3} - \frac{\pi\, {R_2}^2\, H_2}{3}}$$

$$z_G = \frac{3}{4} \times \frac{{R_1}^2\, {H_1}^2 - {R_2}^2\, {H_2}^2}{{R_1}^2\, H_1 - {R_2}^2\, H_2}$$

$$z_G = \frac{3}{4} \times \frac{\frac{{R_1}^4\,H^2}{(R_1-R_2)^2} - \frac{{R_2}^4\,H^2}{(R_1-R_2)^2}}{\frac{{R_1}^3\,H}{R_1-R_2} - \frac{{R_2}^3\,H}{R_1-R_2}}$$

$$\boxed{z_G = \frac{3}{4}\,H\,\frac{{R_1}^4 - {R_2}^4}{(R_1-R_2)\left({R_1}^3 - {R_2}^3\right)}}$$

On peut vérifier que l'on retrouve la formule d'un cône $z_G = \frac{3}{4}\,H$ pour $R_2 = 0$

4)

$$J_{O\vec{\imath}} = J_{O\vec{\jmath}} = \frac{3}{20}\,m_1\left({R_1}^2 + \,4\,{H_1}^2\right) - \frac{3}{20}\,m_2\left({R_2}^2 + \,4\,{H_2}^2\right)$$

Or :

$$m_1 = \rho\,V_1 = m\,\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{\pi\,{R_1}^2\,H_1}{3}}{\frac{\pi\,{R_1}^2\,H_1}{3} - \frac{\pi\,{R_2}^2\,H_2}{3}} = m\frac{{R_1}^2\,H_1}{{R_1}^2\,H_1 - {R_2}^2\,H_2} = m\,\frac{\frac{{R_1}^3\,H}{R_1-R_2}}{\frac{{R_1}^3\,H}{R_1-R_2} - \frac{{R_2}^3\,H}{R_1-R_2}}$$

$$\boxed{m_1 = m\frac{{R_1}^3}{{R_1}^3 - {R_2}^3} \qquad m_2 = m\frac{{R_2}^3}{{R_1}^3 - {R_2}^3}}$$

$$J_{O\vec{\imath}} = J_{O\vec{\jmath}} = \frac{3}{20}\,m\,\left(\frac{{R_1}^5 - {R_2}^5 + {R_1}^3{H_1}^2 - {R_2}^3{H_2}^2}{{R_1}^3 - {R_2}^3}\right)$$

$$\boxed{J_{O\vec{\imath}} = J_{O\vec{\jmath}} = \frac{3}{20}\,m\,\frac{{R_1}^5 - {R_2}^5}{{R_1}^3 - {R_2}^3}\left(1 + \frac{4\,H^2}{(R_1-R_2)^2}\right)}$$

$$J_{O\vec{k}} = \frac{3}{10}\,m_1{R_1}^2 - \frac{3}{10}\,m_2{R_2}^2$$

$$\boxed{J_{O\vec{k}} = \frac{3}{10}\, m\, \frac{{R_1}^5 - {R_2}^5}{{R_1}^3 - {R_2}^3}}$$