Devoir Maison AI2 – Electrostatique

Enseignant (L.Gry)

<u>Exercice 1</u> (8 points)

On se donne un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

1) Montrer que le champ de force suivant, peut être un champ électrostatique, c'est-à-dire qu'il dérive d'un potentiel.

$$\vec{E} = (2\,x^2 - 1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\,\vec{u}_x + 2\,x\,y\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\,\vec{u}_y - x\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\,\vec{u}_z$$

2) Déterminer le potentiel électrostatique associé

3) On considère une hélice de rayon 1, d'axe $(O, \vec{u}_z)$ de pas $2\,\pi$, d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = sin(t) \\ z = t \end{cases}$$

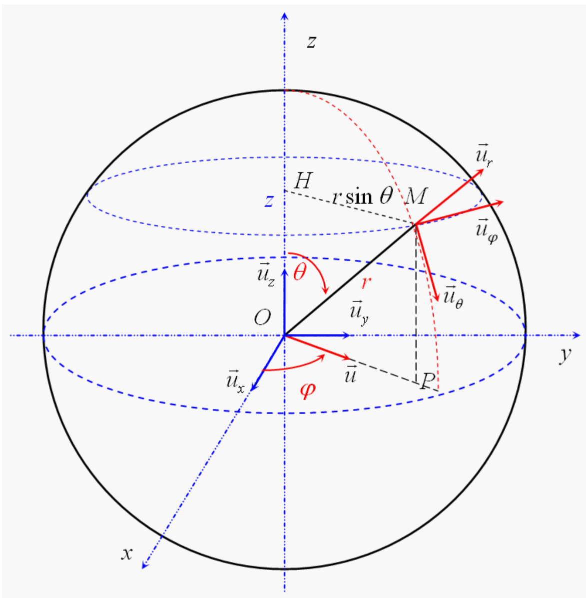
a) Représenter l'hélice dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et y faire apparaitre le pas ainsi que le paramètre t

b) Calculer le travail du champ électrostatique entre le point $A(1,0,0)$ de l'hélice et le point M

de l'hélice de paramètre t

c) Déterminer les valeurs du paramètre t pour lesquelles ce travail est nul, puis positif et maximal.

<u>Exercice 2 : Gradient en coordonnées sphériques (10 points)</u>



Soit un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Un point M distinct de O peut alors être repéré par un triplet de coordonnées dites sphériques (r, θ, φ) définies comme suit, en notant P le projeté orthogonal de M sur le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ ce dernier étant orienté par son repère :

$$r = OM, \;\; \theta = (\vec{u}_z, \overrightarrow{OM}), \qquad \varphi = (\vec{u}_x, \overrightarrow{OP})$$

θ est un angle orienté défini dans le plan $(O, \vec{u}_z, \vec{u})$ orienté par ce dernier repère.

On définit alors un repère orthonormé local sphérique $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ comme suit :

$\vec{u}_r = \frac{1}{r}\,\overrightarrow{OM}$, $\vec{u}_\varphi$ orthogonal unitaire direct à $\overrightarrow{OP}$ dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, $\vec{u}_\theta$ tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ forme une base orthogonale directe

On se place dans une région de l'espace où le champ électrostatique est défini et admet des dérivées partielles continues et on décrit ce champ en un point M dans le repère local sphérique sous forme :

$$\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r + E_\theta\,\vec{u}_\theta + E_\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

toutes les grandeurs étant vues comme des fonctions de (r, θ, φ), y compris le potentiel électrostatique associé, $V(r, \theta, \varphi)$.

1) Donner l'expression du travail élémentaire δW du champ électrostatique entre un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) et le point M' de coordonnées $(r + dr, \theta, \varphi)$

2) En déduire l'expression de E_r en fonction d'une dérivée partielle de $V(r, \theta, \varphi)$

3) Etablir de façon analogue les expressions de E_θ et E_φ en fonction de dérivées partielles de $V(r, \theta, \varphi)$. On précisera les points M et M' employés par leurs coordonnées sphériques et on détaillera le calcul du travail élémentaire.

4) En déduire l'expression du champ électrostatique dans le repère sphérique local en fonction des dérivées partielles du potentiel associé vu comme une fonction des coordonnées sphériques.

5) Pour une fonction $f_c(x, y, z)$ des coordonnées cartésiennes ayant des dérivées partielles continues, on définit la fonction :

$$f_s(r, \theta, \varphi) = f_c(x, y, z)$$

En utilisant ce qui a été fait précédemment, compléter, afin d'obtenir ce que l'on appelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{grad}\, f_c = \frac{\partial f_c}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial f_c}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial f_c}{\partial z}\,\vec{u}_z = \qquad\qquad \vec{u}_r + \qquad \vec{u}_\theta + \qquad \vec{u}_\varphi$$

6) Application : On considère une région de l'espace dans lequel le potentiel a la forme :

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{sin(\theta)\, cos(\varphi)}{r}$$

a) Donner l'expression du champ électrostatique dans la base locale sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

b) Exprimer le potentiel en coordonnées cartésiennes (x, y, z) et donner l'expression du champ électrostatique dans la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Correction :

1)

$$\frac{\partial\left((2\,x^2-1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\right)}{\partial y} = -2\,y\,(2\,x^2-1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)} = \frac{\partial\left(2\,x\,y\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\right)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\left((2\,x^2-1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\right)}{\partial z} = cos(z)\,(2\,x^2-1)\,e^{-(x^2+y^2)} = \frac{\partial\left(-x\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\right)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\left(2\,x\,y\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\right)}{\partial z} = 2\,x\,y\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)} = \frac{\partial\left(-x\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)}\right)}{\partial y}$$

Les dérivées croisées étant égale, la différentielle associée au travail de $\vec{E}$ est exacte donc ce champ dérive d'un potentiel.

2)

Commençons par intégrer :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y = -\,2\,x\,y\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}$$

Il vient :

$$V = x\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)} + f(x,z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = x\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)}$$

Il vient :

$$x\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)} + \frac{\partial f}{\partial z} = x\,cos(z)\,e^{-(x^2+y^2)}$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Soit :

$$f(x,z) = g(x)$$

Reportons enfin dans :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -(2\,x^2-1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}$$

Il vient :

$$-(2\,x^2-1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)} + \frac{dg}{dx} = -(2\,x^2-1)\,sin(z)\,e^{-(x^2+y^2)}$$

Donc :

$$\frac{dg}{dx} = 0$$

Soit :

$$g(x) = Cte$$

On peut choisir cette constante nulle et le potentiel est :

$$V = x\, sin(z)\, e^{-(x^2+y^2)}$$

3)

a)

b)

$$W = V(1,0,0) - V(cos(t), sin(t), t) = -cos(t)\, sin(t)\, e^{-1} = -\frac{1}{2\,e}\, sin(2\,t)$$

Ce travail est nul pour :

$$2\,t = \; k\,\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

soit

$$t = \; k\,\frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ce travail est positif et maximal pour :

$$2\,t = \; -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

soit

$$t = \; -\frac{\pi}{4} + \; k\,\pi\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

<u>Exercice 2</u>

1)

$$\delta W = \vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = E_r\, dr$$

2) On a :

$$\delta W = V(r, \theta, \varphi) - V(r + dr, \theta, \varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r}\, dr$$

Donc :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

3) On considère un travail élémentaire entre $M(r, \theta, \varphi)$ et $M'(r, \theta + d\theta, \varphi)$

$$\delta W = \vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = E_\theta \, r \, d\theta = V(r,\theta,\varphi) - V(r,\theta + d\theta,\varphi) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \, d\theta$$

Donc :

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Considérons enfin un travail élémentaire entre $M(r,\theta,\varphi)$ et $M'(r,\theta,\varphi + d\varphi)$

$$\delta W = \vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = E_\varphi \, r \, sin(\theta) \, d\varphi = V(r,\theta,\varphi) - V(r,\theta,\varphi + d\varphi) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \, d\varphi$$

Donc :

$$E_\varphi = -\frac{1}{r \, sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

4)

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \, \vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \, \vec{u}_\theta - \frac{1}{r \, sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \, \vec{u}_\varphi$$

5)

$$\overrightarrow{grad} \, f_c = \frac{\partial f_c}{\partial x} \, \vec{u}_x + \frac{\partial f_c}{\partial y} \, \vec{u}_y + \frac{\partial f_c}{\partial z} \, \vec{u}_z = \frac{\partial f_s}{\partial r} \, \vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \, \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \, sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \, \vec{u}_\varphi$$

6) a)

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{sin(\theta) \, cos(\varphi)}{r}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{sin(\theta) \, cos(\varphi)}{r^2}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{cos(\theta) \, cos(\varphi)}{r^2}$$

$$-\frac{1}{r \, sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{sin(\varphi)}{r^2}$$

Donc :

$$\vec{E} = \frac{sin(\theta) \, cos(\varphi)}{r^2} \, \vec{u}_r - \frac{cos(\theta) \, cos(\varphi)}{r^2} \, \vec{u}_\theta + \frac{sin(\varphi)}{r^2} \, \vec{u}_\varphi$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(sin(\theta) \, cos(\varphi) \, \vec{u}_r - cos(\theta) \, cos(\varphi) \, \vec{u}_\theta + sin(\varphi) \, \vec{u}_\varphi\right)$$

b) On note que :

$$x = r \, sin(\theta) \, cos(\varphi)$$

Ainsi :

$$V(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Donc :

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2\,x\,y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2\,x\,z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

D’où :

$$\vec{E} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\Big((x^2 - y^2 - z^2)\,\vec{u}_x - 2\,x\,y\,\vec{u}_y - 2\,x\,z\,\vec{u}_z\Big)$$