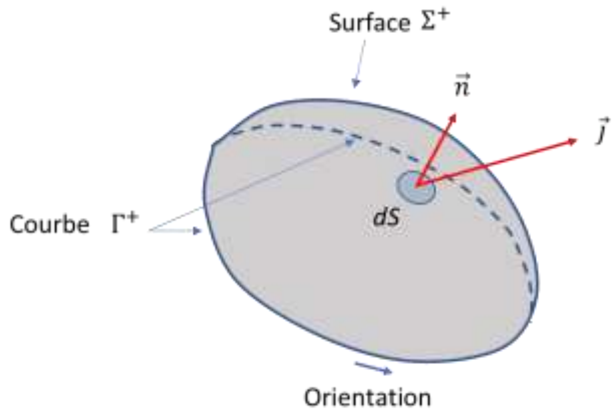
Devoir maison AI2 : Magnétostatique

Enseignant (L.Gry)

<u>Partie A : Problème :</u>

<u>I Préambule : Théorème d'Ampère</u>



Etant donné une distribution de courants dans l'espace indépendants du temps et une courbe fermée et orientée Γ^+, alors la circulation du champ magnétique le long de cette courbe est égale au produit de la perméabilité magnétique du vide μ_0 par l'intensité à travers toute surface Σ^+ de contour cette courbe et orientée par cette dernière, soit mathématiquement :

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 \, I}$$

Le cas le plus général étant une modélisation par distribution volumique de courants, les autres cas étant des cas limites de ce dernier, on définit un vecteur $\vec{j}$ appelé vecteur densité volumique de courant en un point de l'espace où se situe une densité volumique de charges $\rho = dq/dV$ de vecteur vitesse $\vec{v}$ par :

$$\vec{j} = \rho \, \vec{v}$$

Ainsi, si en un point il y a dans son voisinage N électrons par unité de volume porteurs chacun de la charge élémentaire e, le vecteur densité de courant est :

$$\vec{j} = -N \, e \, \vec{v}$$

L'intensité à travers une surface de l'espace Σ^+ orientée est alors donnée par la formule :

$$\boxed{I = \iint_{\Sigma^+} \vec{j} \cdot dS \, \vec{n}}$$

Elle correspond physiquement à la charge (en coulombs (C)) qui a traversé la surface pendant une unité de temps (seconde)

<u>Question</u> :

Citer dans le domaine de l'électrostatique un théorème analogue auquel fait penser le théorème d'Ampère.

II) Champ magnétique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant (5 points)

On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité constante I

1) Rappelez par un schéma la forme des lignes du champ magnétique créé par ce fil et précisez comment le mettre en évidence expérimentalement.

2) Faire apparaitre sur le schéma, la direction et le sens du vecteur champ magnétique.

3) Quelles propriétés présente ce champ magnétique sur une ligne de champ donnée ?

4) Etablir, en utilisant un contour fermé adapté et le théorème d'Ampère, que l'expression du vecteur champ magnétique en un point quelconque est donnée en fonction de la distance r du point au fil par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2 \pi r} \vec{t}$$

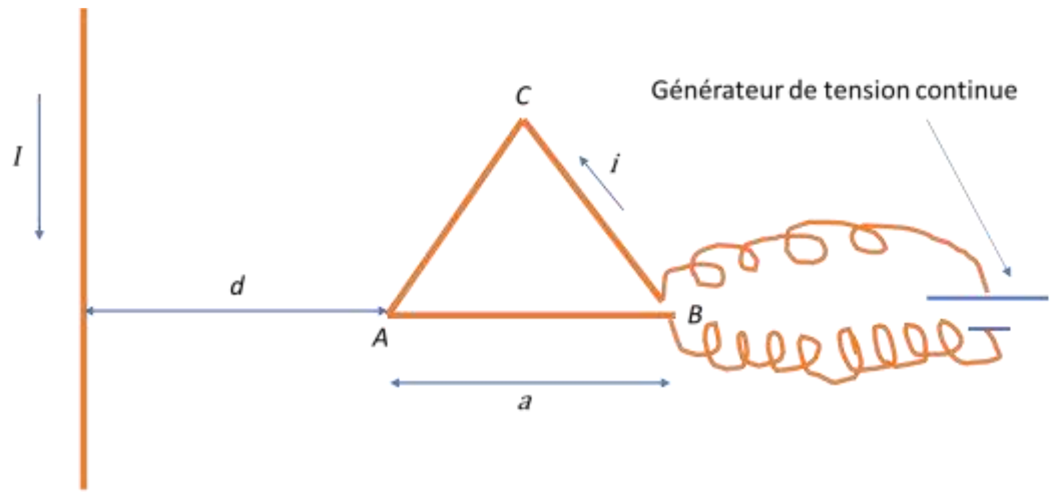
où $\vec{t}$ est le vecteur unitaire tangent au cercle d'axe le fil passant par le point considéré et pour lequel on rappellera avec un dessin la règle qui permet d'en déterminer le sens.

5) Vers quoi tend la norme de ce champ quand r tend vers 0 ? Cela vous semble-t-il étrange ?

6) On considère cette fois-ci que le fil est un cylindre de révolution de rayon R. Justifier que la formule du 4) reste valable pour $r > R$. Vers quoi tend la norme du champ magnétique lorsque r tend vers R ? Justifier en quoi cela explique le problème rencontré en 5)

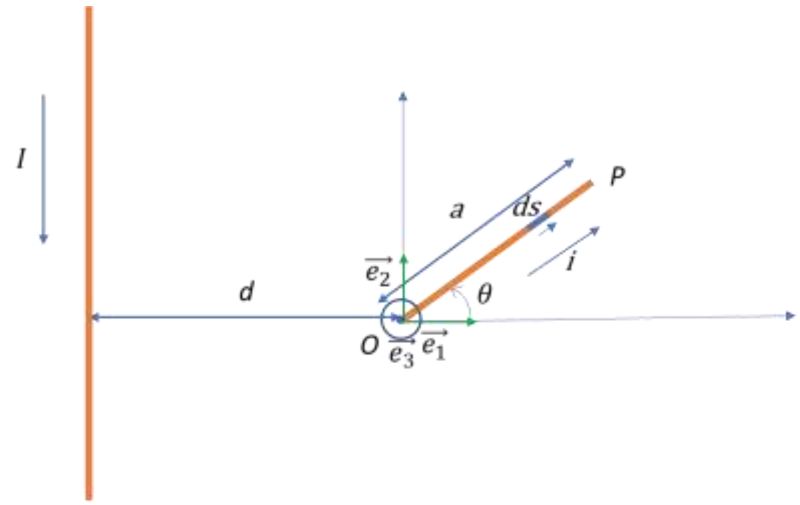
III Force d'interaction entre un fil rectiligne infini et un circuit filiforme triangulaire parcouru par un courant d'intensité constante (5 points)

On considère un circuit triangulaire équilatéral filiforme de côté a parcouru par un courant d'intensité i produit par un générateur de tension continue, branché aux bornes du triangle par des fils torsadés pour lesquels les forces d'origine magnétique s'annihilent et un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I situé dans le plan du triangle et à une distance d de ce dernier selon le schéma ci-dessous.



1) Donner la cause et le nom des forces agissant sur les trois portions $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ du circuit triangulaire et les faire apparaitre sur le schéma.

2) Afin d'exprimer la résultante de ces forces dans un repère orthonormé adéquat, on commence par évaluer la force qui s'exerce sur une portion de conducteur $[OP]$ parcourue par un courant d'intensité i et repérée dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ tel que défini sur la figure par l'angle orienté $\theta = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OP}\right)$



Déterminer les composantes de cette force dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. On pourra intégrer les forces agissant sur des portions de conducteur infinitésimales ds ,ces portions étant repérées par leur abscisse s sur l'axe (O, P) orienté de O vers P.

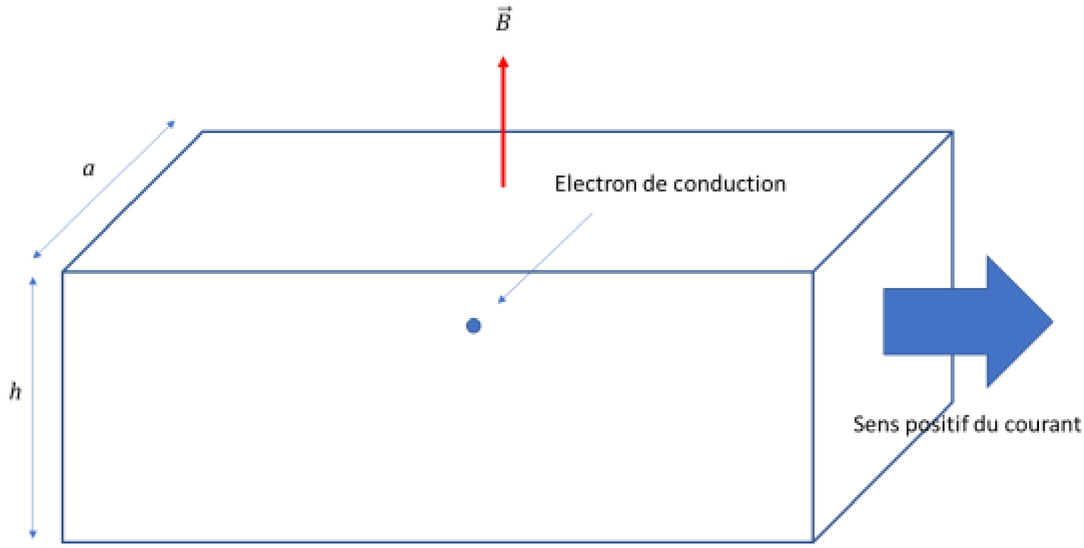
3) En déduire dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ l'expression des forces $\overrightarrow{F_{AB}}, \overrightarrow{F_{BC}}$ et $\overrightarrow{F_{AC}}$ qui agissent respectivement sur les portions $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$ puis la résultante de ces trois forces.

4) Faire l'application numérique pour $I = 1\ A, i = 1\ A, \mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7} S.I, a = 10\ cm, d = 10\ cm$

<u>Partie B : Exercice sur l'effet Hall (10 points) :</u>

Une sonde à effet Hall est utilisée pour mesurer un champ magnétique à partir de la mesure d'une tension. Elle est utilisée dans la conception des teslamètres, instruments de mesure du champ magnétique régnant en un point de l'espace. Le principe de la sonde est le suivant :

On dispose d'un conducteur de forme parallélépipédique de largeur a et de hauteur h, et parcouru par un courant d'intensité constante I telle qu'indiquée par le schéma. Le conducteur baigne dans une région de l'espace où règne un champ constant $\vec{B}$. Nous supposerons la sonde orientée de telle sorte que le champ est orthogonal à une des faces latérales du conducteur (face supérieure sur le schéma).



1) En considérant dans le conducteur un électron de conduction de charge $-e$, représenter sur le schéma le vecteur vitesse $\vec{v}$ de cet électron en l'absence de champ magnétique, puis représenter et nommer la force qui s'exerce sur cet électron au moment de l'application du champ magnétique.

2) En déduire, que pendant un régime transitoire, que l'on admettra très bref, deux faces latérales opposées du conducteur se chargent comme les deux armatures d'un condensateur, ce que l'on appelle effet Hall, et représenter ces charges sur le schéma.

3) On se place en régime permanent (atteint de façon quasi instantanée à notre échelle). Les trajectoires des électrons de conduction sont alors modélisées comme étant rectilignes uniformes parallèles aux arêtes latérales du conducteur. Montrer, en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron de conduction, que le champ électrostatique dû à l'effet Hall est :

$$\overrightarrow{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

4) En déduire la norme E_H de $\overrightarrow{E_H}$ en fonction de la norme v de $\vec{v}$ et de la norme B de $\vec{B}$.

5) En déduire la tension de Hall U_H entre la face chargée positivement et la face chargée négativement en fonction de v, B et d'un paramètre du parallélépipède.

6) En désignant par N le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, et en utilisant la formule de l'intensité donnée dans le préambule, exprimer I en fonction de N, e, a, h, v.

7) En déduire l'expression de B en fonction de U_H, N, e, I, h.

8) Dessiner et nommer un dispositif qui permettrait de créer un champ magnétique constant d'intensité B dans une région de l'espace et expliquer pourquoi un tel dispositif permettrait, en y intégrant une sonde de hall, de mesurer N.

Corrigé :

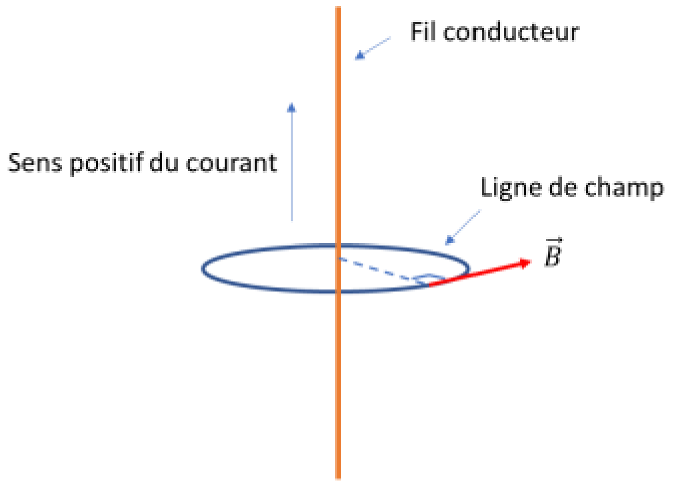
Partie A Problème :

I Préambule :

Le théorème de Gauss en électrostatique du vide présente une formulation analogue.

II

1) 2) Les lignes de champ sont des cercles dont le fil est l'axe de révolution.



3) L'intensité du champ magnétique est par symétrie de révolution, la même en tout point d'une ligne de champ.

4) En appliquant le théorème d'ampère sur une ligne de champ de rayon r orientée dans le sens de $\vec{t}$ et en notant $B(r)$ la norme du vecteur champ magnétique sur cette ligne, on obtient :

$$\int_{\Gamma^+} \vec{B} \cdot d\vec{M} = 2\,\pi\, r\, B(r) = \mu_0\, I$$

Soit :

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}}$$

Le sens du vecteur $\vec{t}$ est donné par la règle suivante : On place le pouce de la main droite dans le sens positif de l'intensité et on replie les autres doigts, ce qui donne le sens de $\vec{t}$

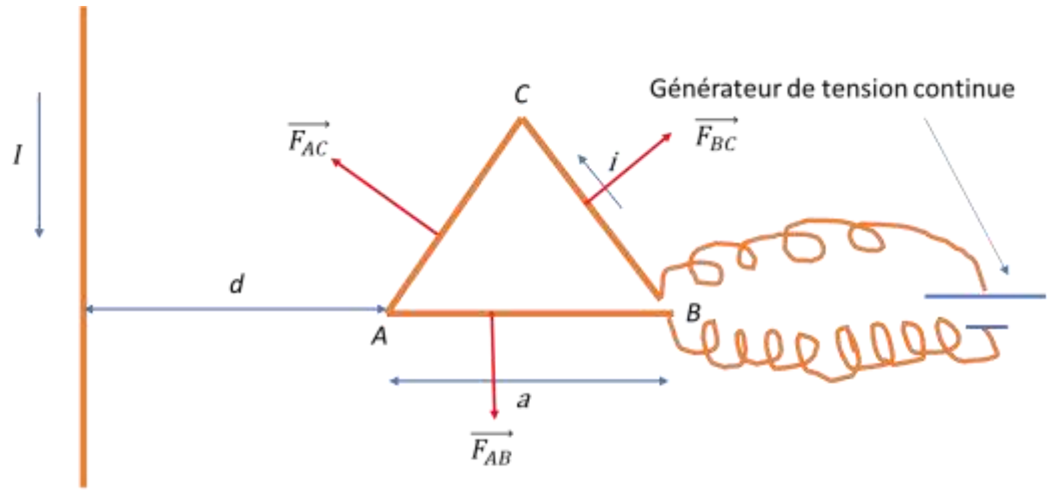
5) $B(r)$ tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0, ce qui semble a priori très étrange. Mais en fait, quand r devient petit, on ne peut plus, pour le calcul du champ magnétique, considérer le conducteur comme filiforme. Il faut le voir comme un cylindre de rayon fini R.

6) Dans ce cas pour r tendant vers R, $B(r)$ tend bien vers une valeur qui peut être grande si R est petit mais quoi qu'il en soit, finie :

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, R}}$$

III)

1) Les trois portions du triangle sont soumises à une force de Laplace dont la cause est d'une part le courant i qui les traverse et d'autre part le fait qu'elles baignent dans le champ magnétique créé par le fil rectiligne.



Noter que le point d'application de chacune de ces forces n'est pas au centre du côté auquel elle s'applique car la distribution des forces sur chaque tronçon infinitésimal n'est pas uniforme, étant donné que plus le tronçon est proche du fil conducteur et plus l'intensité de la force est importante.

2)

Un tronçon repéré par son abscisse s et de longueurds est soumis à la force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{f} = i\, ds\, \vec{u} \wedge \overrightarrow{B_I}$$

où $\overrightarrow{B_I}$ est le champ magnétique créé par le fil rectiligne infini au point M du tronçon et $\vec{u}$ le vecteur unitaire de même direction et sens que $\overrightarrow{OP}$.

Si on désigne par r la distance de M au fil rectiligne, alors :

$$\overrightarrow{B_I} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r}\, \overrightarrow{e_3}$$

D'autre part :

$$r = d + OM\, cos(\theta) = d + s\, cos(\theta)$$

Et :

$$\vec{u} = cos(\theta)\, \overrightarrow{e_1} + sin(\theta)\, \overrightarrow{e_2}$$

Ainsi :

$$d\vec{f} = \frac{\mu_0\, i\, I\, ds}{2\,\pi\,\big(d + s\, cos(\theta)\big)}\, \big(cos(\theta)\, \overrightarrow{e_1} + sin(\theta)\, \overrightarrow{e_2}\big) \wedge \overrightarrow{e_3}$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I\, ds}{2\,\pi\,\big(d + s\, cos(\theta)\big)}\, \big(-cos(\theta)\, \overrightarrow{e_2} + sin(\theta)\, \overrightarrow{e_1}\big)$$

La résultante des forces s'obtient alors par intégration :

$$\vec{f} = \int_{s=0}^{a} \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi\,\big(d + s\,cos(\theta)\big)}\ \left(-cos(\theta)\,\overrightarrow{e_2} + sin(\theta)\,\overrightarrow{e_1}\right) ds$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi} \int_{s=0}^{a} \frac{ds}{d + s\,cos(\theta)} \quad \left(-cos(\theta)\,\overrightarrow{e_2} + sin(\theta)\,\overrightarrow{e_1}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi}\ \frac{1}{cos(\theta)} \left[Ln\big(d + s\,cos(\theta)\big)\right]_0^a \left(-cos(\theta)\,\overrightarrow{e_2} + sin(\theta)\,\overrightarrow{e_1}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi}\ Ln\left(\frac{d + a\,cos(\theta)}{d}\right)\left(-\,\overrightarrow{e_2} + tan(\theta)\,\overrightarrow{e_1}\right)$$

$$\boxed{\vec{f} = \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi}\ Ln\left(1 + \frac{a}{d}\,cos(\theta)\right)\left(tan(\theta)\,\overrightarrow{e_1} -\ \overrightarrow{e_2}\right)}$$

3) Pour le côté $[AB]$ on fait : $\theta = 0$ ainsi

$$\overrightarrow{F_{AB}} = \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi}\ Ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)\left(-\,\overrightarrow{e_2}\right)$$

Pour le côté $[BC]$ on fait : $\theta = 120°$ et on remplace d par $d + a$

$$\overrightarrow{F_{BC}} = \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi}\ Ln\left(1 - \frac{a}{2\,(d + a)}\right)\left(-\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_1} -\ \overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{\pi}\ Ln\left(1 - \frac{a}{2\,(d + a)}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{e_1} - \frac{1}{2}\,\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0\, i\, I}{\pi}\ Ln\left(1 - \frac{a}{2\,(d + a)}\right)\ \vec{u}(30°)$$

Où $\vec{u}(30°)$ est le vecteur unitaire tel que $\left(\overrightarrow{e_1}, \vec{u}(30°)\right) = 30°$

Pour le côté $[AC]$ on fait : $\theta = 60°$ et on remplace d par $d + a$ et on remplace i par $-i$

$$\overrightarrow{F_{AC}} = \frac{\mu_0\, (-i)\, I}{2\,\pi}\ Ln\left(1 + \frac{a}{2\,d}\right)\left(\sqrt{3}\,\overrightarrow{e_1} -\ \overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{\pi}\ Ln\left(1 + \frac{a}{2\,d}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{\pi}\ Ln\left(1 + \frac{a}{2\,d}\right)\ \vec{u}(120°)$$

Où $\vec{u}(120°)$ est le vecteur unitaire tel que $\left(\overrightarrow{e_1}, \vec{u}(120°)\right) = 120°$

La force résultante s'en déduit par addition des trois :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi}\left(\left(-\sqrt{3}\,Ln\left(1 + \frac{a}{2\,d}\right) - \sqrt{3}\,Ln\left(1 + \frac{a}{2\,(d + a)}\right)\right)\overrightarrow{e_1}\right.$$
$$\left. + \left(Ln\left(1 + \frac{a}{2\,d}\right) - Ln\left(1 - \frac{a}{2\,(d + a)}\right) - Ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)\right)\overrightarrow{e_2}\right)$$

$$= \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi} \left(-\sqrt{3}\, Ln\left(\frac{(2\,d + a)}{2\,d}\, \frac{(2\,d + 3\,a)}{(2\,d + 2\,a)} \right) \overrightarrow{e_1} + \left(Ln\left(\frac{2\,d + a}{2\,d}\right) - Ln\left(\frac{2\,d + a}{2\,d + 2\,a}\right) - Ln\left(\frac{d + a}{d}\right) \right) \overrightarrow{e_2} \right)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0\, i\, I}{2\,\pi} \left(-\sqrt{3}\, Ln\left(\frac{(2\,d + a)}{2\,d}\, \frac{(2\,d + 3\,a)}{(2\,d + 2\,a)} \right) \overrightarrow{e_1} + Ln\left(\frac{a}{d}\right) \overrightarrow{e_2} \right)}$$

4) pour $I = 1\,A, i = 1\,A, \mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7} S.I, a = 10\,cm, d = 10\,cm$

$$\vec{F} = \frac{4\,\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 1}{2\,\pi} \left(-\sqrt{3}\, Ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}\right) \overrightarrow{e_1} + Ln(1)\, \overrightarrow{e_2} \right)$$

$$= 2 \times 10^{-7} \left(-\sqrt{3}\, Ln\left(\frac{15}{8}\right) \overrightarrow{e_1} \right)$$

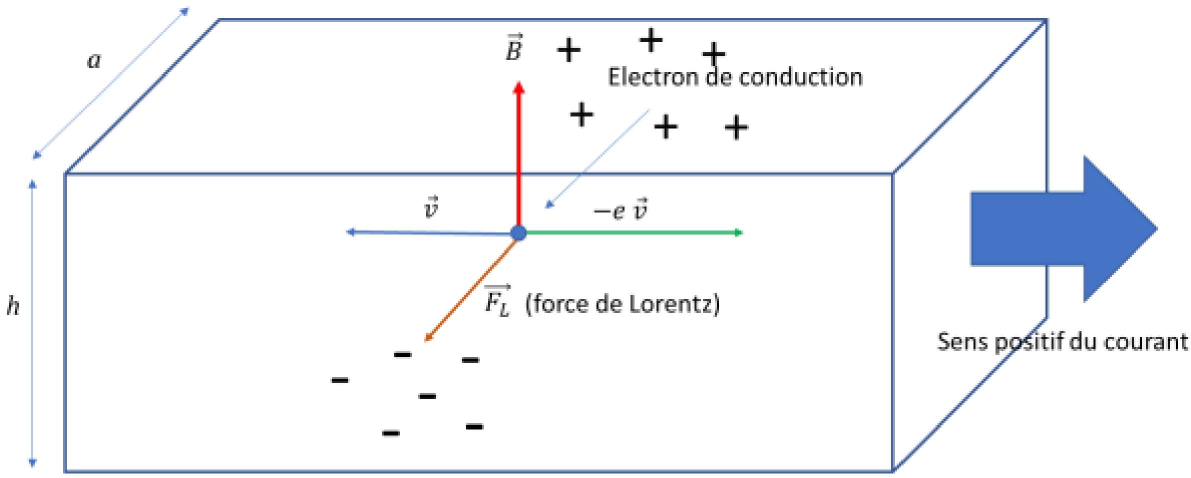
$$= 2 \times 10^{-7} \left(-\sqrt{3}\, Ln\left(\frac{15}{8}\right) \overrightarrow{e_1} \right)$$

$$= -2{,}2 \times 10^{-7}\, \overrightarrow{e_1}\ (N)$$

C'est une force qui attire le triangle vers le fil. Pour obtenir l'effet mécanique complet, il faudrait regarder également la somme des moments des forces exercées sur le triangle afin de voir si il est soumis à un couple qui tend à le faire tourner sur lui-même dans son plan.

Partie B : Effet Hall

1)



2)

La force de Lorentz a pour effet de déplacer les électrons en mouvement vers la face avant sur notre schéma, ce qui fait apparaitre des charges positives sur la face opposée, ceci jusqu'à ce que le champ électrostatique créé par ce condensateur compense, par la force électrostatique qu'il exerce sur les électrons en mouvement, la force de Lorentz.

3) Un électron de conduction n'ayant pas de mouvement latéral, la somme des forces dans la direction latérale est nulle. Or, négligeant son poids, l'électron est soumis à une force de Lorentz $\overrightarrow{F_L}$ et une force électrostatique $\overrightarrow{F_H}$ due à l'effet Hall. Ainsi :

$$\overrightarrow{F_L} + \overrightarrow{F_H} = \vec{0}$$

Soit :

$$-e\,\vec{v} \wedge \vec{B} - e\,\overrightarrow{E_H} = \vec{0}$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{E_H} = -\,\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

4) En norme, cette formule donne :

$$\boxed{E_H = v\,B}$$

5) Or :

$$\boxed{U_H = E_H\,a = v\,B\,a}$$

6) On a :

$$\boxed{I = j\,a\,h = N\,e\,v\,a\,h}$$

7) On en déduit :

$$U_H = \frac{I}{N\,e\,a\,h}\,B\,a$$

Soit :

$$\boxed{B = \frac{N\,e\,h\,U_H}{I}}$$

8) Le dispositif consiste en deux bobines d'Helmholtz de rayon R séparées d'une distance R. L'espace proche de l'axe commun entre les deux bobines est une zone de champ approximativement constant.