Devoir maison AI2 – Avril 2018

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : **Calcul de potentiel associé à un champ de vecteurs (5 pts)**

On considère, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le champ de force :

$$\vec{F} = (sin(3\,y)\,e^{-x} - e^{-z})\,\vec{\imath} + (-3\,cos(3\,y)\,e^{-x})\,\vec{\jmath} + (x\,e^{-z})\,\vec{k}$$

1) Vérifier que ce champ dérive bien d'un potentiel $V(x,y,z)$ tel que $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(V)$ (1,5 pt)
2) Déterminer ce potentiel (à une constante près) (1,5 pt)
3) Calculer le travail de $\vec{F}$ entre les points $O(0,0,0)$ et $A(1,1,1)$ (1 pt)
4) Calculer la divergence de ce champ (1 pt)

Exercice 2 : **Travail d'un champ de forces qui ne dérive pas d'une potentiel (5 pts)**

k étant une constante réelle, on considère, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le champ de force :

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\,\vec{\imath} + (x\,y + k)\,\vec{\jmath}$$

et on donne les points : $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$

1) Vérifier que le champ de force ne dérive pas d'un potentiel (0,5 pt)

On considère dans le plan $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les deux courbes suivantes : Γ_1 est le quart de cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 1$, situé dans le quart de plan : $x \geq 0, y \geq 0, z = 0$. Γ_2 est le segment $[A\,;B]$.

2) Faire un dessin de Γ_1 et Γ_2 (0,5 pt)
3) Calculer, en fonction de k, le travail W_1 du champ de force le long de la courbe Γ_1 et en allant de A à B (on veillera à paramétrer judicieusement Γ_1) (1,5 pt)
4) Sans calculs, donner la valeur du travail W'_1 du champ de force le long de la courbe Γ_1 et en allant de B à A (0,5 pt)
5) Calculer le travail W_2 du champ de force le long de la courbe Γ_2 et en allant de A à B (1,5 pt)

Exercice 3 : Théorème d'Ostrogradski (4 pts)

On considère, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ le champ de force défini par

$$\vec{F} = y\,e^{-x}\,\vec{\imath} + z\,e^{-2\,y}\,\vec{\jmath} + x\,e^{-3\,z}\,\vec{k}$$

On considère le pavé droit défini par le système d'inéquations :

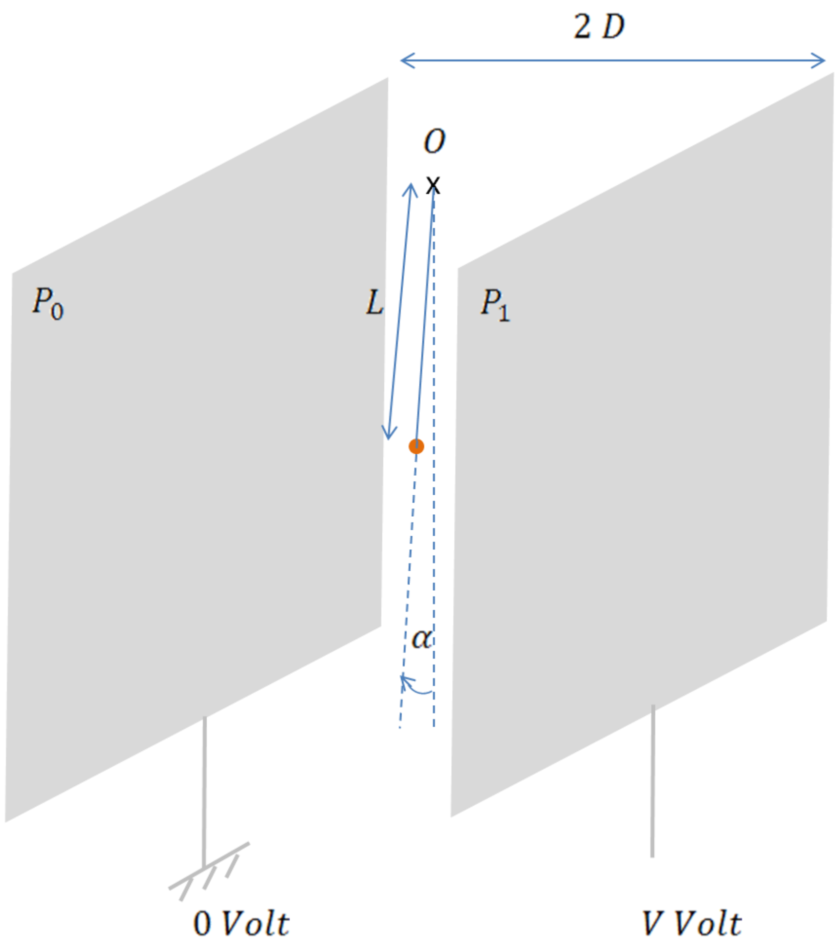
$$0 \leq x \leq 2\,,0 \leq y \leq 1\,,0 \leq z \leq 3$$

Calculer de deux façons :

$$\iiint_{pavé} div(\vec{F})\,dx\,dy\,dz$$

1) directement (2 pt)
2) en utilisant le théorème d'Ostrogradski (2 pt)

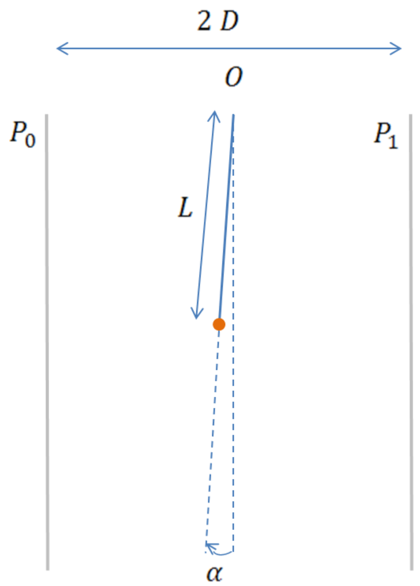
Exercice 4 : Mesure d'une tension avec un pendule électrique (6 pts)



On considère un condensateur plan dont les deux plateaux P_0 et P_1 distants d'une longueur $2\,D$ sont disposés verticalement. On relie P_0 au sol (potentiel nul) et on porte P_1 au potentiel V.

On place une petite sphère conductrice de masse m et de rayon R très petit devant $2\,D$ à bonne distance du condensateur et de tout conducteur et on la relie par un fil conducteur à P_1 de telle sorte qu'elle soit à l'équilibre au même potentiel V que P_1.

On la transporte alors sans la décharger à l'aide d'un fil isolant et on la laisse pendre en accrochant le fil en un point O situé dans le plan médian des deux plateaux comme indiqué sur la figure ci dessous. La longueur du pendule entre le centre de la sphère et le point O est alors L et le fil fait un angle α inférieur à 5 degrés.



a) Etablir l'expression du vecteur champ électrostatique créé par la sphère uniformément chargée par une charge totale q en fonction de paramètres adaptés que l'on précisera et en utilisant le théorème de Gauss (0,5 pt)
b) Que peut-on dire du potentiel à l'intérieur de la sphère ? (0,5 pt)
c) Y 'a-t-il continuité du potentiel créé par la sphère dans tout l'espace ? (0,5 pt)
d) Déduire du a) l'expression du potentiel à la surface de la sphère en fonction de sa charge q et des paramètres de l'énoncé (valeur littérale uniquement) (0,5 pt)
e) Quels sont les forces agissant sur la sphère en équilibre entre P_0 et P_1 ? (0,5 pt)
f) En appliquant les lois de l'équilibre pour la sphère, montrer que l'on a (2 pts):

$$V^2 = \frac{m\,g\,D}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\,\alpha \qquad \text{(on fera un dessin repésentant les forces)}$$

g) En déduire la sensibilité s de ce voltmètre, définie par (0,5 pt) :

$$s = \frac{d\alpha}{dV}$$

h) Faire l'application numérique pour V et s (sans calculette !!!) avec les données suivantes (1 pt) : $m\,g = 5 \times 10^{-4}\,N, R = 3\,mm, L = 30\,cm, 2\,D = 20\,cm, \alpha = 1°30'$

On précisera à quelle masse m correspond la donnée.

Corrigé :

Exercice 1

1) On vérifie l'égalité des dérivées croisées :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial (sin(3\,y)\,e^{-x} - e^{-z})}{\partial y} = 3\,cos(3\,y)e^{-x}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial (-3\,cos(3\,y)\,e^{-x})}{\partial x} = 3\,cos(3\,y)e^{-x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial (sin(3\,y)\,e^{-x} - e^{-z})}{\partial z} = e^{-z}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial (x\,e^{-z})}{\partial x} = e^{-z} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial (-3\,cos(3\,y)\,e^{-x})}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial (x\,e^{-z})}{\partial y} = \ 0 = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

2) Intégrons ;

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x = -sin(3\,y)\,e^{-x} + e^{-z}$$

$$V = sin(3\,y)\,e^{-x} + x\,e^{-z} + f(y,z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_y = 3\,cos(3\,y)\,e^{-x}$$

il vient :

$$3\,cos(3\,y)\,e^{-x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 3\,cos(3\,y)\,e^{-x}$$

soit :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

donc :

$$f(y,z) = g(z)$$

Reportons dans :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_z = -x\, e^{-z}$$

il vient :

$$-x\, e^{-z} + \frac{dg}{dz} = -x\, e^{-z}$$

soit :

$$\frac{dg}{dz} = 0$$

donc :

$$g(z) = Cte = C$$

finalement :

$$V = sin(3\, y)\, e^{-x} + x\, e^{-z} + C$$

3) on a :

$$W = V(O) - V(A) = C - (sin(3\,)\, e^{-1} + e^{-1} + C) = -e^{-1}(sin(3) + 1)$$

4) On a :

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial(sin(3\, y)\, e^{-x} - e^{-z})}{\partial x} + \frac{\partial(-3\, cos(3\, y)\, e^{-x})}{\partial y} + \frac{\partial(x\, e^{-z})}{\partial z}$$

$$= -sin(3\, y)\, e^{-x} + 9\, sin(3\, y)\, e^{-x} - x\, e^{-z} = 8\, sin(3\, y)\, e^{-x} - x\, e^{-z}$$

Exercice 2

1) On vérifie que les dérivées croisées ne sont pas égales :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y} = 2\, y$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial(x\, y + k)}{\partial x} = y \neq \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

2)

3) On adopte pour paramétrage du cercle :

$$\begin{cases} x = cos(\theta) \\ y = sin(\theta) \end{cases} , \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Soit en différentiant :

$$\begin{cases} dx = -sin(\theta)\, d\theta \\ dy = cos(\theta)\, d\theta \end{cases}$$

Le travail élémentaire s'écrit alors :

$$\delta W = F_x\, dx + F_y\, dy = (x^2 + y^2)\, dx + (x\, y + k)\, dy$$

$$= 1\,(-sin(\theta)\, d\theta) + (sin(\theta)\, cos(\theta) + k)\, cos(\theta)\, d\theta$$

$$= \left(-sin(\theta) + sin(\theta)\, cos^2(\theta) + k\, cos(\theta)\right) d\theta$$

Ainsi :

$$\mathrm{W}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-sin(\theta) + sin(\theta)\, cos^2(\theta) + k\, cos(\theta)\right) d\theta$$

$$= \left[cos(\theta) - \frac{1}{3}\, cos^3(\theta) + k\, sin(\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [0 - 0 + k] - \left[1 - \frac{1}{3} - 0\right] = k - \frac{2}{3}$$

4) $\mathrm{W'}_1 = -\mathrm{W}_1$
5) On adopte pour paramétrage du segment :

$$\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \end{cases} , x \in [0,1]$$

Soit en différentiant :

$$\begin{cases} dx = dx \\ dy = -dx \end{cases}$$

Le travail élémentaire s'écrit alors :

$$\delta W = F_x\, dx + F_y\, dy = (x^2 + (1 - x)^2)\, dx + (x\,(1 - x) + k)(-dx)$$

$$= (x^2 + 1 - 2\,x + x^2)\, dx - (x - x^2 + k)\, dx$$

$$= (3\,x^2 - 3\,x + 1 - k)\, dx$$

Ainsi (en faisant attention à l'ordre des bornes) :

$$W_2 = \int_1^0 (3\,x^2 - 3\,x + 1 - k)\,dx$$

$$= \left[x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + (1-k)x\right]_1^0$$

$$= [0] - \left[1 - \frac{3}{2} + 1 - k\right] = k - \frac{1}{2}$$

Exercice 3

1) Calcul de la divergence :

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial (y\,e^{-x})}{\partial x} + \frac{\partial (z\,e^{-2\,y})}{\partial y} + \frac{\partial (x\,e^{-3\,z})}{\partial z}$$

$$= -y\,e^{-x} - 2\,z\,e^{-2\,y} - 3\,x\,e^{-3\,z}$$

Puis de l'intégrale :

$$\iiint_{pavé} div(\vec{F})\,dx\,dy\,dz = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{1}\left(\int_{z=0}^{3}(-y\,e^{-x} - 2\,z\,e^{-2\,y} - 3\,x\,e^{-3\,z})\,dz\right)dy\right)dx$$

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{1}[-y\,e^{-x}z - \;z^2\,e^{-2\,y} + x\,e^{-3\,z}]_0^3\,dy\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{1}([-3\,y\,e^{-x} - \;9\,e^{-2\,y} + x\,e^{-9}] - [0 + 0 + x])\,dy\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{1}(-3\,y\,e^{-x} - \;9\,e^{-2\,y} + x\,e^{-9} - x)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left[-\frac{3}{2}\,y^2\,e^{-x} + \;\frac{9}{2}\;e^{-2\,y} + x\,(e^{-9} - 1)\,y\right]_0^1\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left(\left[-\frac{3}{2}\;e^{-x} + \;\frac{9}{2}\;e^{-2} + x\,(e^{-9} - 1)\right] - \left[0 + \;\frac{9}{2}\; + 0\right]\right)dx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\left(-\frac{3}{2}\;e^{-x} + \;\frac{9}{2}\;e^{-2} + x\,(e^{-9} - 1) - \frac{9}{2}\right)dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}\, e^{-x} + \frac{9}{2}\,(e^{-2}-1)\,x + \frac{x^2}{2}\,(e^{-9}-1)\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{2}\,(e^{-2}-1) + 9\,(e^{-2}-1) + 2\,(e^{-9}-1)$$

$$= \frac{21}{2}\,(e^{-2}-1) + 2\,(e^{-9}-1)$$

2) Deuxième méthode :

$$\iiint_{pavé} div(\vec{F})\, dx\, dy\, dz = \Phi_{\Sigma^+}(\vec{F})$$

où $\Phi_{\Sigma^+}(\vec{F})$ désigne le flux sortant de $\vec{F}$ à travers la surface du pavé.

$$\Phi_{\Sigma^+}(\vec{F}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{\imath}\; dS + \iint_{\Sigma'_1} \vec{F}\cdot(-\vec{\imath})\; dS + \iint_{\Sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{\jmath}\; dS + \iint_{\Sigma'_2} \vec{F}\cdot(-\vec{\jmath})\; dS$$

$$+ \iint_{\Sigma_3} \vec{F}\cdot\vec{k}\; dS + \iint_{\Sigma'_3} \vec{F}\cdot(-\vec{k})\; dS$$

$$= \iint_{\Sigma_1} y\, e^{-x}\, dy\, dz - \iint_{\Sigma'_1} y\, e^{-x}\, dy\, dz + \iint_{\Sigma_2} z\, e^{-2\,y}\, dx\, dz - \iint_{\Sigma'_2} z\, e^{-2\,y}\, dx\, dz$$

$$+ \iint_{\Sigma_3} x\, e^{-3\,z}\; dx\, dy - \iint_{\Sigma'_3} x\, e^{-3\,z}\; dx\, dy$$

$$= 3\int_{y=0}^{1} y\, e^{-2}\, dy - 3\int_{y=0}^{1} y\; dy + 2\int_{z=0}^{3} z\, e^{-2}\, dz - 2\int_{z=0}^{3} z\; dz + \int_{x=0}^{2} x\, e^{-9}\, dx - \int_{x=0}^{2} x\; dx$$

$$= \frac{3}{2}(\, e^{-2}-1) + 9\,(\, e^{-2}-1) + 2\,(e^{-9}-1)$$

$$= \frac{21}{2}\,(e^{-2}-1) + 2\,(e^{-9}-1)$$

Nous retrouvons bien la même valeur par les deux méthodes

Exercice 4 :

a) Soit un point M de l'espace et à une distance r du centre O de la sphère. Posons :

$$\vec{u} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OM}$$

Si M est situé à l'intérieur de la sphère, le théorème de Gauss montre que le champ électrostatique est nul, le potentiel constant et si M est situé à l'extérieur de la sphère, le champ et le potentiel sont les mêmes que si toute sa charge était concentrée en O soit :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\;\vec{u}}$$

b) Le champ électrostatique étant nul, le potentiel à l'intérieur de la sphère est constant

c) La distribution de charges sur la sphère est surfacique, donc le potentiel créé par cette dernière est défini et continu en tout point de l'espace

d) Le potentiel à l'extérieur de la sphère est donné par :

$$V(r) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

En particulier, à la surface de la sphère :

$$\boxed{V = V(R) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}}$$

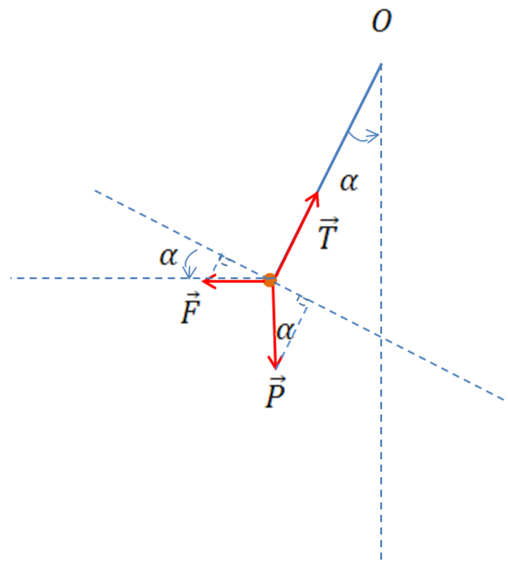
e) Les forces agissant sur la sphère sont son poids $\vec{P} = m\,\vec{g}$, la tension du fil $\vec{T}$ et une force électrostatique $\vec{F}$ due au champ électrostatique $\overrightarrow{E_S}$ créé par les deux plateaux et telle que :

$$\vec{F} = q\,\overrightarrow{E_S}$$

Avec :

$$\|\vec{F}\| = \frac{q\,V}{2\,D}$$

f) On applique le principe de l'équilibre à la sphère :



$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

On projette cette relation sur la direction perpendiculaire à $\vec{T}$:

$$\|\vec{F}\| \, cos(\alpha) = \|\vec{P}\| \, sin(\alpha)$$

Soit :

$$\frac{q\,V}{2\,D}\, cos(\alpha) = m\, g\, sin(\alpha)$$

Sachant :

$$q = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R\,V$$

Il vient :

$$\frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R\,V^2}{2\,D} = mg\, tan(\alpha)$$

Sachant α petit on peut faire l'approximation (en radians) :

$$tan(\alpha) \approx \alpha$$

Ainsi :

$$\boxed{V^2 = \frac{m\,g\,D}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\,\alpha}$$

g) Différentions l'expression précédente :

$$2\,V\,dV = \frac{m\,g\,D}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\,d\alpha$$

On tire :

$$\boxed{\frac{d\alpha}{dV} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R\,V}{m\,g\,D}}$$

La sensibilité dépend donc de la tension V à mesurer.

h) Application numérique : sans calculette !!!

$$\alpha = 1°30' = 1{,}5° = \frac{1{,}5\times\pi}{180}\,rad = \frac{\pi}{120}\,rad$$

$$V = \sqrt{\frac{m\,g\,D}{2\,\pi\,\varepsilon_0\,R}\,\alpha} = \sqrt{\frac{5\times10^{-4}\times\ 10^{-1}}{\frac{1}{18\times10^9}\times3\times10^{-3}}\,\frac{\pi}{120}}$$

$$= \sqrt{\frac{18\times5\times10^9\times10^{-4}\times\ 10^{-1}}{3\times120\times10^{-3}}\,\pi} = \sqrt{\frac{5\times10^9\times10^{-4}\times\ 10^{-1}}{2\times10\times10^{-3}}\,\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{10\times10^9\times10^{-4}\times\ 10^{-1}}{4\times10^{-2}}\,\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{10^{1+9-4-1+2}\ \pi}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10^7\ \pi} = \frac{10^3}{2}\sqrt{10\,\pi}$$

$$\approx \frac{1000}{2}\ \sqrt{31{,}41} \approx \frac{1000}{2}\times5{,}6$$

$$\approx 2800\,V$$

$$\frac{d\alpha}{dV} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R\,V}{m\,g\,D} = \frac{3\times10^{-3}\times2800}{9\times10^9\times5\times10^{-4}\times10^{-1}}$$

$$= \frac{28\times10^{-1}}{3\times5\times10^9\times10^{-4}\times10^{-1}} = \frac{56\times10^{-1-9+4+1}}{3\times10}$$

$$= \frac{56\times10^{-6}}{3} \approx 1{,}9\times10^{-6}\,rad\,V^{-1}$$