Devoir Maison d'électrostatique- AI2

Enseignant (Laurent Gry)

<u>Préliminaire mathématique</u> (1 point):

Soit, pour $b > 0$ la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + b}}$$

Montrer que f admet pour primitive :

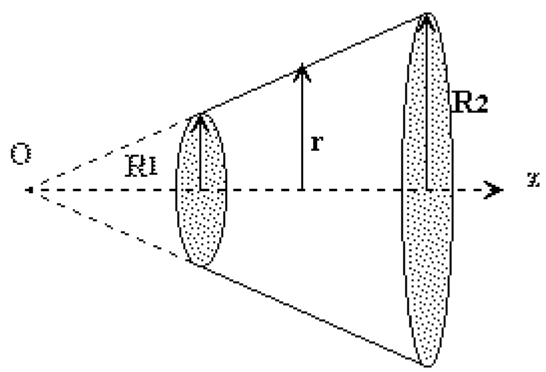
$$F(x) = Ln\left(x - a + \sqrt{(x-a)^2 + b}\right)$$

Problème 1 : <u>Calcul du champ électrostatique créé par un tronc de cône chargé non uniformément (11 points)</u>

On considère un tronc de cône de demi angle au sommet α et de rayons limites R_1 et R_2. Ce système est chargé en surface avec la densité non uniforme :

$$\sigma(r) = \sigma_0 \frac{c}{r}$$

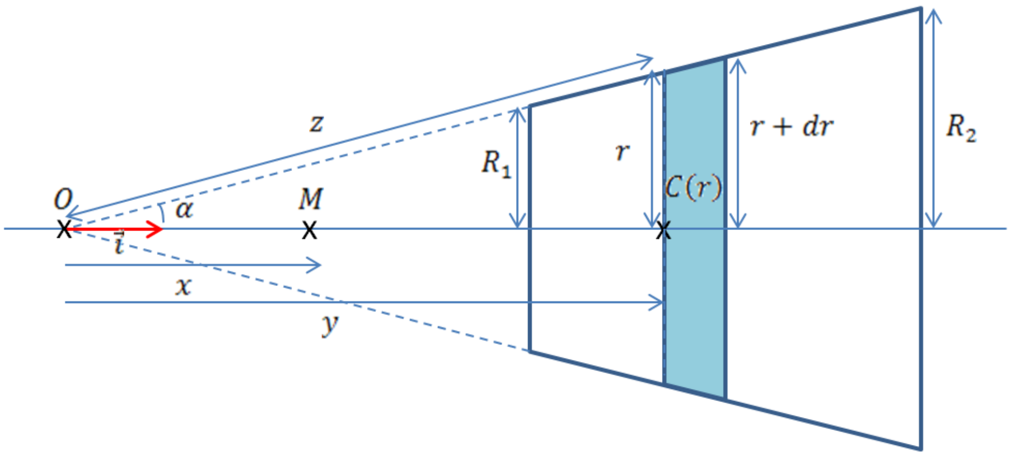
Où c est une constante homogène à une longueur et r le rayon du cône en un point de son axe de symétrie.



On rappelle la formule établie en cours pour le potentiel électrostatique créé par un cercle de rayon *r* uniformément chargé avec la charge *q*, à une distance *a* sur son axe de symétrie :

$$V(a) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

On peut alors diviser le tronc de cône en surfaces élémentaires, définies par des troncs de cône situés entre des cercles de rayon r et $r + dr$ (voir schéma ci-dessous)

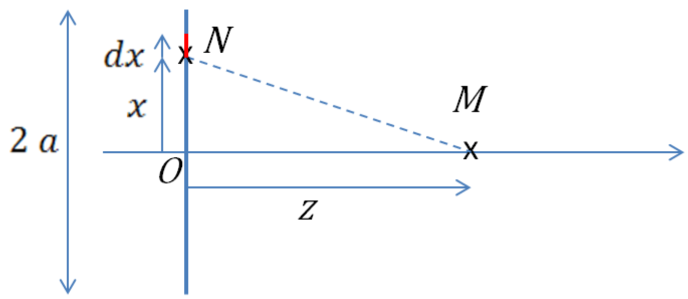


1) Déterminer l'aire $A(r)$ d'un cône de sommet O, de rayon r et d'angle au sommet α
2) En déduire l'aire d^1S de la surface élémentaire située entre les cercles de rayons r et $r + dr$ en fonction de r, α, dr
3) En déduire la charge $d^1q = \sigma(r)\ d^1S$ portée par la surface élémentaire en fonction de σ_0, c, α, et dr
4) Calculer la charge totale Q portée par le tronc de cône et exprimer d^1q en fonction de Q, R_1, R_2 et dr
5) Calculer le potentiel électrostatique $d^1V(r)$ créé par la surface élémentaire en un point M d'abscisse x (On mettra $d^1V(r)$ sous une forme canonique adaptée au calcul intégral qui suivra)
6) En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V(x)$ créé par le tronc de cône au point M d'abscisse x de l'axe
7) Vérifier que l'on retrouve la formule du potentiel créé par une charge ponctuelle lorsque l'on fait tendre x vers $+\infty$ (on rappelle que pour u proche de 1 : $Ln(u) \approx u - 1$)
8) Comment obtiendrait-on le champ électrostatique en un point M d'abscisse x de l'axe?
9) Tracer à l'aide d'un traceur de courbe l'allure de la courbe du potentiel $V(x)$ le long de l'axe (O ; $\vec{\imath}$) en prenant pour valeurs numériques $R_1 = 5\ cm, R_2 = 10\ cm, \alpha = 45°$. Lire sur le graphique l'abscisse en laquelle le champ électrique est nul. A quel rayon du cône cela correspond il ?
10) Justifier le choix de la densité de charge non uniforme.

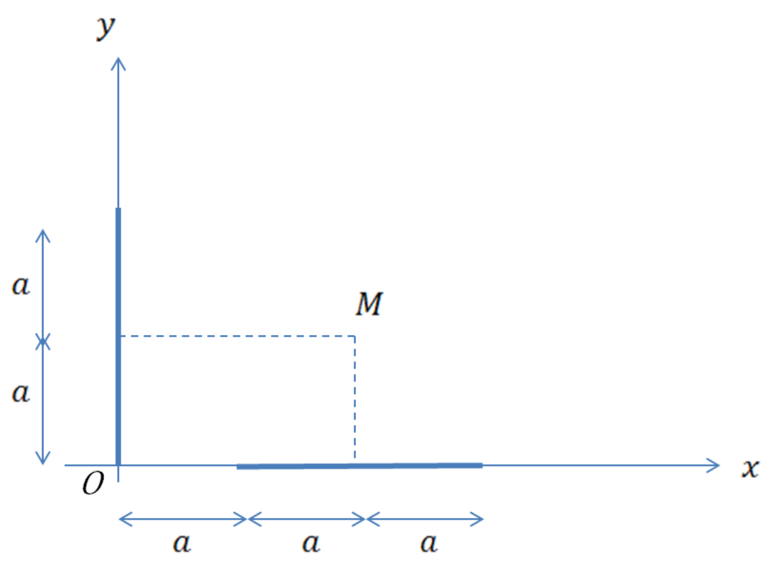
<u>Problème 2</u> : Calcul du champ électrique créé par un segment chargé uniformément (8 points)

On considère un segment de longueur $L = 2\,a$ uniformément chargé de charge totale Q et donc portant une densité linéique de charges :

$$\lambda = \frac{Q}{2\,a}$$



1) Déterminer la charge d^1q portée par un élément de segment de longueur dx pris en un point N de ce segment d'abscisse x en fonction de Q, a, dx
2) Déterminer la contribution $d^1V(x)$ de cet élément au potentiel créé en un point M d'abscisse z de la médiatrice de ce segment en fonction de $Q, a, x, dx, z, \varepsilon_0$
3) En déduire le potentiel $V(z)$ créé en M par le segment en fonction de Q, a, z, ε_0
4) Vérifier que le potentiel lointain correspond bien à la formule obtenue si toute la charge était concentrée au milieu O segment.
5) Y-a-t-il continuité du potentiel en 0 ?
6) Déterminer le champ électrostatique en tout point M d'abscisse z de la médiatrice du segment en fonction de Q, a, z, ε_0. Vérifier la formule de champ lointain.
7) On considère deux segments de même longueur $L = 2\,a$ uniformément chargés avec la même charge Q et disposés comme sur la figure ci-dessous. Déterminer les composantes du champ résultant au point M de la figure dans le repère (O, x, y) mentionné. Calculer l'angle α formé par le vecteur champ électrostatique avec l'axe (O, x)



Correction

Préliminaire mathématique :

$$F(x) = Ln\left(x - a + \sqrt{(x-a)^2 + b}\right)$$

$$F'(x) = \frac{1 + \dfrac{2\,(x-a)}{2\sqrt{(x-a)^2+b}}}{x - a + \sqrt{(x-a)^2+b}} = \frac{\sqrt{(x-a)^2+b} + x - a}{\left(x - a + \sqrt{(x-a)^2+b}\right)\sqrt{(x-a)^2+b}} = f(x)$$

Problème 1 :

1) Si on développe le cône, on obtient :

$$A(r) = \frac{1}{2} \times 2\,\pi\, r\, z = \pi\, r\, z$$

Sachant :

$$sin(\alpha) = \frac{r}{z}$$

Donc :

$$z = \frac{r}{sin(\alpha)}$$

D'où :

$$\boxed{A(r) = \frac{\pi\, r^2}{sin(\alpha)}}$$

2) On a :

$$\boxed{d^1S = A(r+dr) - A(r) = d\big(A(r)\big) = \frac{2\,\pi\, r}{sin(\alpha)}\ dr}$$

3) On a :

$$\boxed{d^1q = \sigma_0\ \frac{c}{r} \times \frac{2\,\pi\, r}{sin(\alpha)}\ dr = \frac{2\,\pi\,\sigma_0\, c}{sin(\alpha)}\ dr}$$

4) On a :

$$\boxed{Q = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\,\pi\,\sigma_0\, c}{sin(\alpha)}\ dr = \frac{2\,\pi\,\sigma_0\, c}{sin(\alpha)}\ (R_2 - R_1)}$$

On en déduit :

$$\boxed{d^1q = \frac{Q}{R_2 - R_1}\ dr}$$

5) On a :

$$d^1V(r) = \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{M(x)\,C(r)} = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(R_2 - R_1)}\,\frac{dr}{\sqrt{r^2 + (y-x)^2}}$$

Sachant :

$$tan(\alpha) = \frac{r}{y}$$

Donc :

$$y = \frac{r}{tan(\alpha)}$$

D'où :

$$d^1V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(R_2 - R_1)}\,\frac{dr}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{tan(\alpha)} - x\right)^2}}$$

Or :

$$r^2 + \left(\frac{r}{tan(\alpha)} - x\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{tan^2(\alpha)} - \frac{2\,r\,x}{tan(\alpha)} + x^2$$

$$= \frac{sin^2(\alpha)\,r^2}{sin^2(\alpha)} + \frac{cos^2(\alpha)\,r^2}{sin^2(\alpha)} - \frac{2\,r\,x}{sin(\alpha)} + x^2$$

$$= \frac{r^2 - 2\,x\,sin(\alpha)\,cos(\alpha)\,r + \,x^2\,sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)}$$

$$= \frac{\big(r - x\,sin(\alpha)\,cos(\alpha)\big)^2 - x^2\,sin^2(\alpha)\,cos^2(\alpha)\, + \,x^2\,sin^2(\alpha)}{sin^2(\alpha)}$$

$$= \frac{\big(r - x\,sin(\alpha)\,cos(\alpha)\big)^2 + \,x^2\,sin^4(\alpha)}{sin^2(\alpha)}$$

On en déduit :

$$\boxed{d^1V(r) = \frac{Q\,sin(\alpha)}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(R_2 - R_1)}\,\frac{dr}{\sqrt{\big(r - x\,sin(\alpha)\,cos(\alpha)\big)^2 + \,x^2\,sin^4(\alpha)}}}$$

6) On a :

$$V(x) = \int_{R_1}^{R_2} d^1V(r)$$

$$= \frac{Q\ sin(\alpha)}{4\ \pi\ \varepsilon_0\ (R_2 - R_1)} \left[Ln\left(r - x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) + \sqrt{\left(r - x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha)\right)^2 +\ x^2\ sin^4(\alpha)} \right) \right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\boxed{V(x)\ = \frac{Q\ sin(\alpha)}{4\ \pi\ \varepsilon_0\ (R_2 - R_1)} Ln\left(\frac{R_2 - x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) + \sqrt{\left(R_2 - x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha)\right)^2 +\ x^2\ sin^4(\alpha)}}{R_1 - x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) + \sqrt{\left(R_1 - x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha)\right)^2 +\ x^2\ sin^4(\alpha)}} \right)}$$

7) Notons pour $x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) > R_2$ que le potentiel se met sous la forme :

$$V(x)\ =$$

$$\frac{Q\ sin(\alpha)}{4\ \pi\ \varepsilon_0\ (R_2 - R_1)} \left(Ln\left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x\ sin^2(\alpha)}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_2}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x\ sin^2(\alpha)}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_1}\right)^2} - 1} \right) + Ln\left(\frac{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_1}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_2}\right) \right)$$

Les quantités sous les logarithmes tendant vers 1 quand x tend vers l'infini, nous aurons :

$$V(x)\ \approx$$

$$\frac{Q\ sin(\alpha)}{4\ \pi\ \varepsilon_0\ (R_2 - R_1)} \left(\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x\ sin^2(\alpha)}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_2}\right)^2} - 1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x\ sin^2(\alpha)}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_1}\right)^2} - 1} - 1 + \frac{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_1}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_2} - 1 \right)$$

Posons alors :

$$a = \frac{x\ sin^2(\alpha)}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_2}, b = \frac{x\ sin^2(\alpha)}{x\ sin(\alpha)\ cos(\alpha) - R_1}$$

Notons alors d'une part que a et b que :

$$\frac{\sqrt{1 +\ a^2} - 1}{\sqrt{1 +\ b^2} - 1} - 1 = \frac{\sqrt{1 +\ a^2} - 1 - \left(\sqrt{1 +\ b^2} - 1\right)}{\sqrt{1 +\ b^2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 +\ a^2} - \sqrt{1 +\ b^2}}{\sqrt{1 +\ b^2} - 1} = \frac{(1 +\ a^2) - (1 +\ b^2)}{\left(\sqrt{1 +\ b^2} - 1\right)\left(\sqrt{1 +\ a^2} + \sqrt{1 +\ b^2}\right)}$$

$$= \frac{a^2 -\ b^2}{\left(\sqrt{1 +\ b^2} - 1\right)\left(\sqrt{1 +\ a^2} + \sqrt{1 +\ b^2}\right)} = \frac{(a - b)\ (a + b)}{\left(\sqrt{1 +\ b^2} - 1\right)\left(\sqrt{1 +\ a^2} + \sqrt{1 +\ b^2}\right)}$$

Et d'autre part a et b sont proches de $tan(\alpha)$, ainsi :

$$a - b = \frac{x\, sin^2(\alpha)}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_2} - \frac{x\, sin^2(\alpha)}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_1}$$

$$= \frac{x\, sin^2(\alpha)\, (R_2 - R_1)}{(x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_2)\, (x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_1)}$$

$$\approx \frac{x\, sin^2(\alpha)\, (R_2 - R_1)}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)\, x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)} = \frac{R_2 - R_1}{x\, cos^2(\alpha)}$$

Et

$$\frac{\sqrt{1 + a^2} - 1}{\sqrt{1 + b^2} - 1} - 1 \approx \frac{R_2 - R_1}{x\, cos^2(\alpha)} \times \frac{2\, tan(\alpha)}{\left(\sqrt{1 + tan^2(\alpha)} - 1\right)\, \left(\sqrt{1 + tan^2(\alpha)} + \sqrt{1 + tan^2(\alpha)}\right)}$$

$$= \frac{R_2 - R_1}{x\, cos^2(\alpha)} \times \frac{2\, tan(\alpha)}{\left(\frac{1}{cos(\alpha)} - 1\right)\, \left(\frac{1}{cos(\alpha)} + \frac{1}{cos(\alpha)}\right)}$$

$$= \frac{R_2 - R_1}{x} \times \frac{tan(\alpha)}{\left(1 - cos(\alpha)\right)}$$

De plus :

$$\frac{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_1}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_2} - 1 = -\frac{R_2 - R_1}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha) - R_2} \approx -\frac{R_2 - R_1}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)}$$

Donc :

$$V(x) \approx \frac{Q\, sin(\alpha)}{4\, \pi\, \varepsilon_0\, (R_2 - R_1)} \left(\frac{R_2 - R_1}{x} \times \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)\left(1 - cos(\alpha)\right)} - \frac{R_2 - R_1}{x\, sin(\alpha)\, cos(\alpha)}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\, \pi\, \varepsilon_0\, x} \left(\frac{sin^2(\alpha)}{cos(\alpha)\left(1 - cos(\alpha)\right)} - \frac{1}{cos(\alpha)}\right)$$

$$= \frac{Q}{4\, \pi\, \varepsilon_0\, x} \left(\frac{sin^2(\alpha) - \left(1 - cos(\alpha)\right)}{cos(\alpha)\left(1 - cos(\alpha)\right)}\right)$$

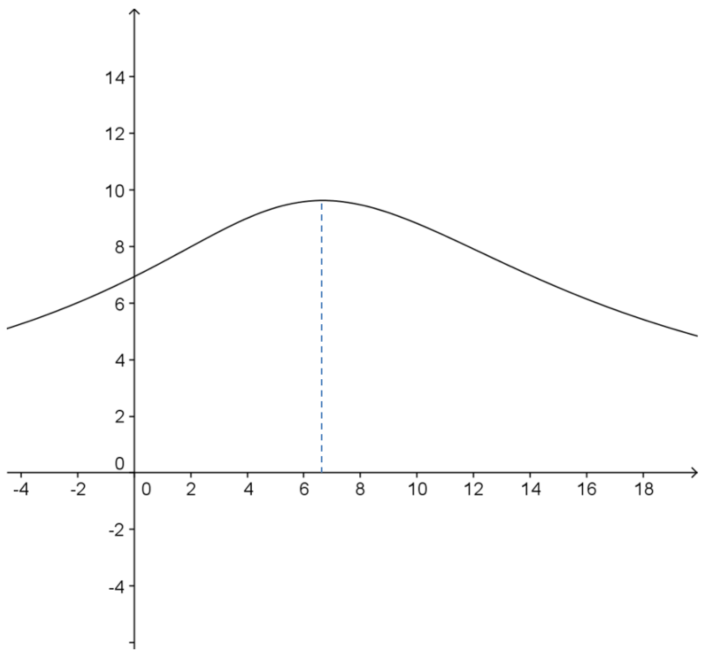
$$= \frac{Q}{4\, \pi\, \varepsilon_0\, x}$$

8) On a :

$$E_x(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

9) L'allure est la même que celle de la fonction :

$$g(x) = 10\, Ln\left(\frac{10 - 0{,}5\, x + \sqrt{(10 - 0{,}5\, x)^2 + 0{,}25\, x^2}}{5 - 0{,}5\, x + \sqrt{(5 - 0{,}5\, x)^2 + 0{,}25\, x^2}}\right)$$



Le champ électrostatique est nul là où la dérivée du potentiel s'annule. Sur le graphique, cela se produit à une abscisse de 6,4 cm environ. Le rayon du cône en ce point est :

$$r = 6,4 \times tan(45°) = 6{,}4\ cm$$

10) L'effet de pointe montre que les charges ont tendance à se concentrer au voisinage des pointes. Si on admet que la partie de cône de plus petit rayon joue le même rôle qu'une pointe, les charges sont plus denses dans cette région.

<u>Problème 2</u> :

1) On a :

$$\boxed{d^1q = \lambda\, dx = \frac{Q}{2\,a}\, dx}$$

2) On a :

$$d^1V(x) = \frac{d^1q}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \times \frac{1}{N(x)\,M(z)}$$

Soit :

$$\boxed{d^1V(x) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,\frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}}}$$

3) On a :

$$V(z) = \int_{x=-a}^{x=a} d^1V(x) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a} \int_{x=-a}^{x=a} \frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\left[Ln\left(x+\sqrt{x^2+\,z^2}\right)\right]_{x=-a}^{x=a}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,Ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+\,z^2}}{-a+\sqrt{a^2+\,z^2}}\right)}$$

Une autre forme peut être donnée :

$$V(z) = \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,Ln\left(\frac{\left(a+\sqrt{a^2+\,z^2}\right)^2}{\left(-a+\sqrt{a^2+\,z^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2+\,z^2}\right)}\right) =$$

$$\frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,Ln\left(\frac{\left(a+\sqrt{a^2+\,z^2}\right)^2}{z^2}\right) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,Ln\left(\frac{a}{z}+\sqrt{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right)$$

Soit :

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,sh^{-1}\left(\frac{a}{z}\right)}$$

4) Si on fait tendre z vers l'infini, on a avec la première forme :

$$V(z) \approx \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+\,z^2}}{-a+\sqrt{a^2+\,z^2}}-1\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,\frac{2\,a}{-a+\sqrt{a^2+\,z^2}} \approx \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{|z|}$$

ce qui est bien le potentiel créé par une charge ponctuelle Q placée au milieu du segment.

Notons qu'avec la seconde, c'est plus rapide, sachant qu'en 0 on a :

$$sh^{-1}(x) \sim x$$

Si on fait tendre z vers 0, $V(z)$ tend vers l'infini. Il n'y a donc pas continuité du potentiel en 0.

5) Le champ électrostatique en $M(z)$ est, par raison de symétrie, porté par la médiatrice. Si on note $E(z)$ sa composante sur un vecteur unitaire de la médiatrice orientée, on a :

$$E(z) = -\frac{dV}{dz} = -\frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\left(\frac{2\,z}{2\,\sqrt{a^2+\,z^2}}\,\frac{1}{a+\sqrt{a^2+\,z^2}} - \frac{2\,z}{2\,\sqrt{a^2+\,z^2}}\,\frac{1}{-a+\sqrt{a^2+\,z^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,\frac{z}{\sqrt{a^2+\,z^2}}\left(\frac{1}{-a+\sqrt{a^2+\,z^2}} - \frac{1}{a+\sqrt{a^2+\,z^2}}\right)$$

$$= \frac{Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0\,a}\,\frac{z}{\sqrt{a^2+\,z^2}}\,\frac{2\,a}{\left(-a+\sqrt{a^2+\,z^2}\right)\left(a+\sqrt{a^2+\,z^2}\right)}$$

$$= \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{z}{\sqrt{a^2+\,z^2}}\,\frac{1}{z^2}$$

Finalement :

$$\boxed{E(z) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{z\sqrt{a^2+\,z^2}}}$$

On vérifie pour z tendant vers l'infini la formule de champ lointain :

$$E(z) \approx \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{z^2}$$

6) Notons E_x et E_y les composantes respectives du champ électrostatique sur les axes x et y du repère. Alors :

$$E_x = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{2\,a\,\sqrt{a^2+\,(2\,a)^{\,2}}} = \frac{Q}{8\sqrt{5}\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2}$$

$$E_y = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{a\,\sqrt{a^2+\,a^{\,2}}} = \frac{Q}{4\sqrt{2}\,\pi\,\varepsilon_0\,a^2}$$

On en déduit :

$$Tan(\alpha) = \frac{E_y}{E_x} = \frac{8\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} = \sqrt{10}$$

D'où :

$$\alpha = Tan^{-1}\big(\sqrt{10}\big) \approx 72{,}5°$$