Devoir Maison d'électrostatique –Mars 2017

Enseignant (L.Gry)

Exercice 1 : Champ électrostatique-Calcul de potentiel (5 pts)

On donne l'expression du champ électrostatique dans une région de l'espace dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\vec{E} = (3\, y\, cos(x) + z)\, \vec{\imath} + 3\ sin(x)\ \vec{\jmath} + x\, \vec{k}$$

1) Vérifier par les conditions de Schwarz que ce champ dérive bien d'un potentiel
2) Déterminer à une constante arbitraire près l'expression du potentiel électrostatique V associé à ce champ.

Exercice 2 : électron orbitant autour d'un proton dans une vision classique (8 pts)

Partie I : Etude d'un mouvement circulaire général

On repère la position du centre de gravité M de l'électron par ses coordonnées polaires $(r, \theta), r = OM, \theta = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ dans un repère orthonormé du plan du mouvement d'origine le proton supposé ponctuel

1) Exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y) du point M en fonction de ses coordonnées polaires (r, θ)
2) En déduire les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ puis celles du vecteur-accélération $\vec{a}$ en fonction de θ et ses dérivées temporelles qu'on notera pour simplifier :
$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\ ;\ \ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$
3) Déterminer, en fonction de (r, θ) les coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du vecteur unitaire tangent $\vec{T}$ à la trajectoire au point M et de même sens que $\vec{v}$
4) Déterminer, en fonction de (r, θ), les coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du vecteur unitaire $\vec{N}$ normal à la trajectoire et pointant dans la concavité (donc directement orthogonal à $\vec{T}$)
5) En déduire une expression du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans la base de Frenet $(\vec{T}, \vec{N})$. On notera v la composante de $\vec{v}$ sur $\vec{T}$ et on mettra en évidence les composantes d'accélération tangentielle et d'accélération normale en faisant apparaître v et non pas θ.

Partie II : Etude du mouvement de l'électron

On considère dans le cadre de la mécanique classique un électron en orbite circulaire uniforme autour d'un proton (modèle de l'atome d'hydrogène).

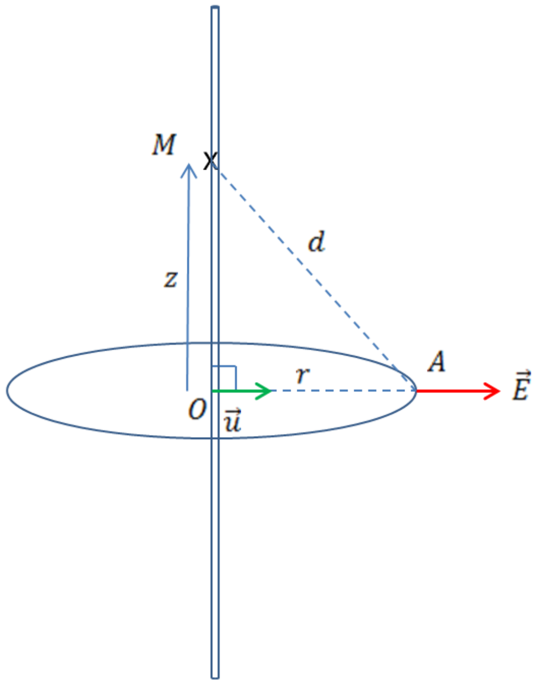
1) Exprimer le potentiel électrostatique créé à une distance r par le proton en fonction de sa charge e et de la constante $k = 9 \times 10^9\ SI$, le potentiel tendant vers 0 à l'infini

2) En appliquant la loi de Newton, exprimer l'énergie cinétique de l'électron en fonction des paramètres précédents et de la masse m de l'électron.
3) En déduire l'expression de l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle électrostatique. Quel est le signe de cette énergie ?

Exercice 3 : Champ créé par un fil rectiligne de grande longueur (7 pts)

On considère un fil rectiligne de longueur $2\,L$, de milieu O uniformément chargé par une densité linéique de charges λ définie par la fait qu'une portion de fil située entre deux abscisses z et $z + dz$ porte une charge :

$$dq = \lambda\, dz$$



1) Expliquer pourquoi le champ électrostatique en un point quelconque A du plan médian de ce fil est situé dans un plan contenant le fil et ce point, et est orthogonal au fil
2) Déterminer la contribution dV au calcul du potentiel en un point A situé dans le plan médian à une distance r de O d'un élément de fil situé entre les abscisses z et $z + dz$.
3) En déduire par intégration le potentiel en A en fonction de k, r, λ, L où k est la constante intervenant dans l'expression du potentiel électrostatique
4) Exprimer la relation liant le travail du champ électrostatique entre deux points infiniment voisins A et A' situés sur un même rayon dans le plan médian à des distances respectives r et $r + dr$ de O et la variation de potentiel entre ces deux points
5) En déduire le champ électrostatique en un point A du plan médian en fonction de k, r, λ, L et du vecteur unitaire radial $\vec{u}$. En donner une formule approchée lorsque L est très grand devant r

Corrigé

Exercice 1 :

1) Calculons les 6 dérivées croisées

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial(3\ y\,cos(x) + z)}{\partial y} = 3\ \ cos(x)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial(3\ \ sin(x))}{\partial x} = 3\ \ cos(x)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial(3\ y\,cos(x) + z)}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial(3\ \ sin(x))}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial(x)}{\partial y} = 0$$

Les dérivées croisées dont égales donc le champ dérive bien d'un potentiel.

2) Calculons le potentiel par intégration

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -3\ y\,cos(x) - z$$

$$V = -3\ y\,sin(x) - x\ z + f(y,z)$$

Donc, d'une part :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -3\ \ sin(x) + \frac{\partial f}{\partial y}$$

d'autre part :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y = -\ 3\ \ sin(x)$$

On en déduit :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$f(y,z) = g(z)$$

Donc à nouveau, d'une part :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -x + \frac{dg}{dz}$$

d'autre part :

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = -\,x$$

On en déduit :

$$\frac{dg}{dz} = 0$$

$$g(z) = cte$$

d'où le potentiel :

$$\boxed{V = -3\,y\,sin(x) - x\,z + cte}$$

Exercice 2

Partie I

1) Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}}$$

2) Les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse sont :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\,r\ \dot{\theta}\sin(\theta) \\ \dot{y} = r\,\dot{\theta}\cos(\theta) \end{cases}$$

et celles du vecteur accélération :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\,r\ \ddot{\theta}\sin(\theta) - r\,\dot{\theta}^2\cos(\theta) \\ \ddot{y} = r\,\ddot{\theta}\cos(\theta) - r\,\dot{\theta}^2\sin(\theta) \end{cases}$$

3) Vecteur tangent de la base de Frenet

$$\vec{T}\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

4) Vecteur normal de la base de Frenet

$$\vec{N}\begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

5) Vecteur vitesse dans la base de Frenet

$$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{T} = v\,\vec{T}$$

Vecteur accélération dans la base de Frenet

$$\vec{a} = r\,\ddot{\theta}\,\vec{T} + r\,\dot{\theta}^2\,\vec{N}$$

$$a_T = r\,\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt}$$

$$a_N = r\,\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{r}$$

<u>Partie II</u>

1) Potentiel électrostatique associé au champ créé par le proton :

$$V = k\,\frac{e}{r}$$

2) La loi de Newton s'écrit :

$$-\,e\,\vec{E} = m\,\vec{a}$$

Exprimée dans le repère de Frenet elle conduit à :

$$k\,\frac{e^2}{r^2}\,\vec{N} = m\,\frac{v^2}{r}\vec{N}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}\,k\,\frac{e^2}{r}}$$

3) L'énergie mécanique au sens classique de l'électron est la somme de son énergie cintéique et son énergie potentielle électrostatique :

$$\boxed{E_{méca} = \frac{1}{2}m\,v^2 - e\,V = k\,\frac{e^2}{2\,r} - k\,\frac{e^2}{r} = -k\,\frac{e^2}{2\,r}}$$

Cette énergie est négative. Ceci explique le choix opéré pour les niveaux d'énergie de l'électron dans le modèle quantique de l'atome d'hydrogène, choix par lequel ces niveaux ont des valeurs négatives quantifiées définies par :

$$E_n = \frac{-13{,}6}{n^2}\;(eV)$$

Exercice 3

1) La somme des contributions de deux éléments de fil symétriques par rapport à O donne en un point A un champ situé dans le plan formé le fil et A colinéaire et de même sens que le vecteur $\vec{u}$ de la figure.

2)

$$dV(z) = k\ \frac{dq}{AM} = k\ \frac{\lambda\, dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

3)

$$V = \int_{-L}^{L} dV(z) = \lambda\, k \int_{-L}^{L} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \lambda\, k\ \left[sh^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)\right]_{L}^{L} = \lambda\, k\ \left(sh^{-1}\left(\frac{L}{r}\right) - sh^{-1}\left(\frac{-L}{r}\right)\right)$$

$$\boxed{V = 2\,\lambda\, k\, sh^{-1}\left(\frac{L}{r}\right)}$$

4) Le champ électrostatique en A s'écrit :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}$$

Son travail élémentaire entre A et A' est :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{AA'} = E(r)\,\vec{u} \cdot dr\,\vec{u} = E(r)\,dr$$

D'autre part, puisqu'il dérive du potentiel V :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{AA'} = V(r) - V(r + dr) = -dV$$

Donc :

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{L}{r^2} \frac{2\,\lambda\, k}{\sqrt{\left(\frac{L}{r}\right)^2 + 1}} = \frac{2\,\lambda\, L\, k}{r\,\sqrt{L^2 + r^2}}$$

Dans le cas où L est très grand devant r on obtient une formule approchée :

$$\boxed{E(r) \approx \frac{2\,\lambda\ k}{r}}$$