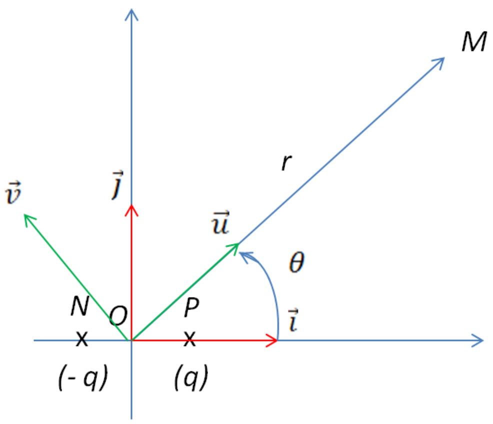
Devoir maison d'électrostatique – Février 2016

(sur 10 points)

Exercice 1 : Dipôle électrostatique (4 points)



On considère un dipôle électrostatique dont l'image est une charge négative $-q$ placée en un point N de l'espace et une charge positive q placée en un point P. On se place dans un plan contenant le dipôle et on munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ comme défini sur la figure. On rappelle que le potentiel électrostatique associé au champ lointain s'exprime en un point M en coordonnées polaires par :

$$V(M) = k\,\frac{p\,cos(\theta)}{r^2}$$

où $k = 9 \times 10^9, p = q \times NM$ (moment dipolaire)

1) <u>Passage en coordonnées cartésiennes (0,5 pt)</u>

Exprimer les coordonnées cartésiennes x, y du point M en fonction de ses coordonnées polaires r, θ.

2) <u>Expression du potentiel en coordonnées cartésiennes</u> (0,5):

Exprimer le potentiel $V(M)$ en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, de k et de p

3) <u>Champ électrostatique (3)</u>

Rappeler ce que signifie la notation $\overrightarrow{grad}\left(V(M)\right)$ et sa relation avec le champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

Calculer, en fonction de x, y, pour l'expression de $V(M)$ précédente (champ lointain) les dérivées partielles de la fonction potentiel électrostatique :

$$\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y}$$

En déduire les composantes du vecteur champ électrostatique dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ toujours en fonction de x, y, k et p

Exprimer également la norme du champ électrique en fonction de x, y, k et p (sans utiliser la formule déjà vue en cours mais directement à partir des composantes cartésiennes du champ électrostatique

Exercice 2 : Calcul du champ électrostatique à partir du potentiel (2 points)

On considère un champ électrostatique associé à un potentiel électrostatique de la forme, dans un repère orthonormé (O, x, y, z):

$$V(M) = 1 + x + x\,y + x\,y\,z$$

Déterminer les composantes du champ électrostatique dans la base du repère

Exercice 3 : Calcul du potentiel associé à un champ de vecteur (4 points)

On considère un champ de force de la forme :

$$\vec{E}(M) = E_x(M)\,\vec{\imath} + E_y(M)\,\vec{\jmath} + E_z(M)\,\vec{k}$$

avec :

$M(x, y, z)$ dans une base orthonormée $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$

$$E_x(M) = y\,z^2$$

$$E_y(M) = x\,z^2 + z$$

$$E_z(M) = 2\,x\,y\,z + 2\,z + y$$

1) <u>Travail élémentaire de ce champ de force (0,5 pt)</u>

Donner l'expression du travail δW de ce champ de force en fonction de x, y, z, dx, dy, dz pour un déplacement élémentaire de $M(x, y, z)$ de vecteur $\overrightarrow{dM} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k}$

2) <u>Calcul des dérivées croisées (1,5 pts)</u>

Calculer les dérivées croisées :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y}, \frac{\partial E_y}{\partial x}, \frac{\partial E_x}{\partial z}, \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Quelle relation doit on vérifier pour que l'expression de δW soit une différentielle exacte ?

3) <u>Potentiel associé (2 pts)</u>

Déterminer le potentiel V associé au champ de force précédent, c'est-à-dire une fonction $V(M)$ telle que :

$$\delta W = -dV$$

Quelle conséquence cela a-t-il sur le travail de ce champ de forces sur un chemin de point initial A et de point final B ?

Corrigé :

<u>Exercice 1</u> :

1)

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

2)

$$V(M) = k\,p\,\frac{r\cos(\theta)}{r^3} = k\,p\,\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3)

$$\overrightarrow{grad}\left(V(M)\right) = \frac{\partial V}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\vec{k}$$

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\left(V(M)\right)$$

4)

$$V(M) = k\,p\,x\,(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k\,p\,\left((x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} + x\,(2\,x)\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$= k\,p\left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\,x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\right)$$

$$= k\,p\,\frac{(x^2+y^2) - 3\,x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} =$$

$$= k\,p\,\frac{y^2 - 2\,x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = k\,p\,\left(x\,(2\,y)\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$= -k\,p\,\frac{3\,x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = k\,p\ \frac{2\,x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = k\,p\ \frac{3\,x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\|\vec{E}\| = k\,p\frac{\sqrt{(2\,x^2-y^2)^2+(3\,x\,y)^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= k\,p\frac{\sqrt{4\,x^4+5\,x^2\,y^2+y^4}}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = k\,p\frac{\sqrt{(4\,x^2+y^2)(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= k\,p\frac{\sqrt{(4\,x^2+y^2)}\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = k\,p\frac{\sqrt{(4\,x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^2}$$

En remplaçant x, y par leurs expressions en coordonnées polaires, on retrouve la formule vue en cours :

$$\|\vec{E}\| = k\,p\frac{\sqrt{(4\,r^2\,cos^2(\theta)+r^2 sin^2(\theta)^2)}}{(r^2)^2} = k\,p\frac{\sqrt{(4\,cos^2(\theta)+sin^2(\theta)^2)}}{r^3}$$

<u>Exercice 2</u> :

$$V(M) = 1 + x + x\,y + x\,y\,z$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 1 + y + y\,z$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = x + x\,z$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = x\,y$$

$$\vec{E}\begin{pmatrix} -\frac{\partial V}{\partial x} = -1 - y - y\,z \\ -\frac{\partial V}{\partial y} = -x - x\,z \\ -\frac{\partial V}{\partial z} = -x\,y \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 3</u> :

1)

$$\delta W = \vec{E} \cdot \overrightarrow{dM} = E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz$$

$$= y\, z^2\, dx + \ (x\, z^2 + z)\, dy + (2\, x\, y\, z + 2\, z + y)\, dz$$

2)

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial (y\, z^2)}{\partial y} = z^2$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial (x\, z^2 + z)}{\partial x} = z^2$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial (y\, z^2)}{\partial z} = 2\, y\, z$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial (2\, x\, y\, z + 2\, z + y)}{\partial x} = 2\, y\, z$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial (x\, z^2 + z)}{\partial z} = 2\, x\, z + 1$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial (2\, x\, y\, z + 2\, z + y)}{\partial y} = 2\, x\, z + 1$$

3)

$$\delta W = -dV = -\frac{\partial V}{\partial x}\, dx - \frac{\partial V}{\partial y}\, dy - \frac{\partial V}{\partial z}\, dz$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -y\, z^2$$

$$V = -x\, y\ \ z^2 + f(y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -E_y = -x\, z^2 - z = -x\, z^2 + \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -z$$

$$f(y, z) = -y\, z + g(z)$$

$$V = -x\, y\ \ z^2 - y\, z + g(z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -E_z = -2\,x\,y\,z - 2\,z - y == -2\,x\,y\,z - y + g'(z)$$

$$g'(z) = -2\,z$$

$$g(z) = -z^2 + cte$$

$$V = -x\,y\;\;z^2 - y\,z - z^2 + cte$$

Le travail du champ de forces ne dépend pas du chemin suivi et vaut :

$$W_{A\to B}(\vec{E}) = \int_{A\to B} -dV = V(A) - V(B)$$